

La gestione del rischio di credito con modelli di derivazione attuariale: il caso di CreditRisk+

Andrea Resti, università di Bergamo

“Financiers can manage risk, but never dispose of it completely. This holds as much for banks estimating loan-default rates as for life insurers pouring over mortality tables or P&C insurers calculating the risk of a fire. As dry and callous as the men of numbers may seem, they fulfil a useful social function.” The Economist, November 6th, 1999.

1. Introduzione

E' particolarmente difficile scegliere le parole con cui accogliere il lettore all'inizio di un saggio dedicato al rischio di credito. La ragione di questo imbarazzo risiede nella consapevolezza che la trattazione, per quanto scrupolosa o particolareggiata, è destinata a rivelarsi incompleta e lacunosa. In effetti, non pare eccessivo affermare che l'attività di concessione del credito rappresenta, in qualche misura, la stessa ragion d'essere del sistema bancario, più ancora della gestione del risparmio o dell'ordinata amministrazione dei pagamenti. Per questo motivo, la letteratura sulle banche e sui meccanismi economici che ne governano il funzionamento è, in massima parte, dedicata proprio alla funzione di produzione dell'attività di prestito; ed un contributo originale in materia può soltanto aspirare ad aggiungere qualche ritocco ad un edificio ormai esteso e consolidato.

L'attuale fase di ristrutturazione dei sistemi creditizi avanzati accresce la centralità dell'attività di erogazione del credito, ma anche le incertezze e le insidie che questa attività comporta. Da un lato, infatti, le banche tradizionali scontano in misura sempre più marcata la concorrenza di altre categorie di intermediari nella gestione del risparmio e persino dei servizi di pagamento; di conseguenza, la concessione di prestiti (in particolare a clientela di medie dimensioni) rimane forse l'unica area di business in cui il primato delle banche (forti di una conoscenza del tessuto economico locale non facilmente replicabile da parte di un outsider) non possa essere facilmente insidiato.

Dall'altro, la graduale crescita del ruolo del mercato dei capitali tra le fonti di finanziamento delle imprese porta con sé un rischio di “selezione avversa” negli attivi bancari: in effetti, mano a mano che le imprese di dimensione medio-grande andranno conquistandosi la possibilità di classare azioni e debito direttamente presso i risparmiatori, il portafoglio crediti delle banche potrebbe polarizzarsi sulle imprese che il mercato non è in grado di valutare autonomamente, cioè le più piccole, le più rischiose, le meno trasparenti nel rappresentare le proprie strategie di crescita.

La prevenzione del rischio di credito può avvenire a due distinti livelli. Da un lato, si tratta di intervenire sulle caratteristiche delle singole esposizioni per ridurre l'entità delle perdite che potrebbero scaturire da ognuna di esse. Dall'altro, è altresì necessario intervenire sulla struttura complessiva del portafoglio crediti della banca, per mantenerne sotto controllo il grado di diversificazione.

A livello di singolo prestito, la banca può tutelarsi contro le perdite future attraverso un'accorta selezione dei prenditori, così da isolare e respingere quelli contraddistinti da una più elevata probabilità di insolvenza; può inoltre strutturare la singola operazione di credito apponendo clausole accessorie o richiedendo garanzie che consentano di limitare le perdite anche in presenza di un

dissesto del debitore; infine, nel caso di linee di credito revocabili, può ridurre l'esposizione a rischio in presenza dei primi segnali di deterioramento del merito creditizio della controparte.

A livello di portafoglio, è necessario perseguire un'effettiva diversificazione del rischio ripartendo il credito tra controparti distinte e scarsamente correlate tra loro. A questo proposito, merita osservare brevemente come le tradizionali categorie logiche di "frammentazione" e "concentrazione" del rischio siano solo in parte adeguate a catturare la realtà.

Il concetto di concentrazione attiene al numero di crediti in essere ed alla loro importanza in termini relativi; è intuitivo che, sotto ipotesi abbastanza generali, una pluralità di piccoli crediti possa offrire una più efficace resistenza contro il rischio di credito, di quanto non faccia invece un portafoglio composto da poche, grandi esposizioni. Alla concentrazione (ed alla frammentazione, che è il suo contrario) fanno riferimento strumenti matematici elementari (ma largamente diffusi, come l'indice di Hirschmann-Herfindhal¹) e precetti normativi ormai entrati nella pratica operativa delle banche europee, come la direttiva sui cosiddetti "grandi fidi"².

Tuttavia, a parità di concentrazione un portafoglio può essere più diversificato se le controparti che lo compongono tendono a muoversi in modo scarsamente correlato; al contrario, se i prenditori condividono i medesimi segmenti di attività economica, e risentono delle medesime cause di instabilità e dissesto, un portafoglio crediti altamente frammentato (e dunque ben "diversificato" in base alle tradizionali misure basate sull'indice di Hirschman-Herfindhal) può risentire di perdite molto elevate, dovute alla contemporanea insolvenza di tutte (o quasi) le controparti affidate.

La misura della correlazione tra lo "stato di salute economica" dei debitori, e degli effetti che questa correlazione ha sull'entità delle perdite future, non rappresenta un compito agevole dal punto di vista matematico-statistico. Il motivo è dato dalla non-normalità (e, più in generale, dall'asimmetria) della distribuzione delle perdite possibili su un portafoglio di crediti³, che rende sostanzialmente inutilizzabili i tradizionali modelli in media/varianza sviluppati per l'ottimizzazione dei portafogli azionari⁴. Negli ultimi anni, tuttavia, sono stati messi a punto diversi algoritmi per la misura dell'effettiva diversificazione di un portafoglio crediti, che hanno dischiuso altrettanti, promettenti filoni di ricerca. Ritorneremo sull'argomento a conclusione del paragrafo, presentando la struttura di questo saggio che approfondisce, in particolare, una di queste metodologie. Prima, tuttavia, accenniamo brevemente a quali dovrebbero essere gli obiettivi di un moderno sistema di controllo del rischio di credito in banca.

Il credit risk management non può ovviamente, eliminare i rischi impliciti nell'attività di prestito, la cui presenza rappresenta, in ultima analisi, la stessa ragion d'essere dei banchieri. Tuttavia, deve mirare a dare una rappresentazione quanto più possibile precisa dei rischi impliciti nelle singole operazioni di prestito e nella struttura complessiva del portafoglio crediti.

In particolare, un buon modello di credit risk management deve stimare la distribuzione delle perdite (o comunque delle minusvalenze) che potrebbero originare dai prestiti attualmente in essere, specificando le probabilità associate alle diverse previsioni (più o meno ottimistiche) di perdita.

¹ Per un esempio di misura del rischio di portafoglio incentrato essenzialmente su misure tradizionali di concentrazione, quale l'indice di Hirschmann-Herfindhal, cfr. ad es. Ford (1998).

² Direttiva Ue 92/121. Per un breve commento, cfr. ad es. Lusignani (1996), capitolo 10.

³ Perdite modeste sono altamente probabili, perdite elevate sono poco frequenti, ma possibili: ciò fa sì che la distribuzione di probabilità delle perdite presenti una lunga coda a destra, e sia dunque fortemente asimmetrica.

⁴ Cfr. Markowitz, Bennett in materiali Altman o libro Caouette.

Il modello deve cioè indicare al management della banca l'ammontare di perdite che è ragionevole attendersi sul portafoglio (perdite attese) ed il livello massimo di perdite che potrebbero verificarsi entro un dato livello di confidenza (ad esempio, nel 99% dei casi).

Simili indicazioni potranno essere utilizzate per finalità di provisioning (dimensionamento ottimale delle riserve), di ottimizzazione del leverage e di pricing dei prestiti. Ad ognuno di questi tre obiettivi dedichiamo una breve riflessione.

1. Un provisioning razionale richiede che le perdite attese sul portafoglio crediti siano interamente coperte da riserve, già spese a conto economico. Solo così, infatti, le rettifiche di valore analitiche legate alle fasi di recessione potranno trovare capienza in apposite voci patrimoniali, e non graveranno per intero (o in massima parte, come attualmente accade) sull'utile lordo di un singolo esercizio. Ne risulteranno stabilizzati il ciclo dei profitti della banca e l'ordinata crescita del suo valore, con positive ripercussioni sulla solidità dei singoli istituti di credito e del sistema bancario nel suo complesso.
2. La ricerca del leverage ottimale per un'impresa bancaria non può prescindere dalla considerazione che essa deve poter fronteggiare, con capitale proprio, l'urto di rischi scarsamente probabili, e tuttavia possibili ad un dato livello di confidenza. La stima della *massima perdita probabile* (ad es. nel 95%, o nel 99% dei casi) rappresenta dunque il presupposto per un efficace dimensionamento dei mezzi propri in relazione ai rischi impliciti in una data struttura dell'attivo; solo se si possiede una ragionevole stima della distribuzione delle perdite future diventa possibile adottare un leverage che tenga conto tanto delle esigenze di massimizzazione dell'utile nel breve periodo, quanto della necessità di garantire la stabilità futura della banca e le ragioni dei terzi creditori.
3. Un sistema di credit risk management adeguato deve quindi consentire un efficace dimensionamento delle riserve e del capitale proprio. Le prime richiedono di essere spese a conto economico, ed il secondo deve essere remunerato attraverso un roe adeguato a compensare gli azionisti per i rischi del loro investimento⁵. I costi di patrimonio e riserve associati ad un prestito devono poi essere correttamente traslati sul cliente, a evitare che l'erogazione di credito comporti una perdita piuttosto che un profitto⁶. Tra i vantaggi di un buon sistema di gestione dei rischi di credito vi è dunque anche quello di consentire un pricing equo e razionale delle singole operazioni, attraverso una conoscenza più precisa dei "costi del rischio" in essa impliciti, che vanno a sommarsi ai normali costi operativi di screening, monitoring, gestione del rapporto commerciale. Quest'ultima ricaduta positiva ci pare particolarmente preziosa per un sistema creditizio, come quello italiano, che più volte, in passato, ha dimostrato di non essere capace di prezzare i prestiti in modo adeguato, rendendo negativa, in più di un caso, la redditività ex post del proprio portafoglio impieghi⁷.

Avendo così presentato in termini generali il tema del controllo del rischio di credito, in cui questo saggio si inserisce, rimane da delimitare meglio il contributo specifico offerto al lettore dalle pagine che seguono. In altre parole, resta da chiarire quale sia il valore aggiunto promesso a chi legge in cambio della sua fatica.

⁵ Cfr. *infra*, § 2.1.

⁶ In questo senso, dunque, le perdite su crediti non derivano solo dalle possibili insolvenze, ma anche da un cattivo pricing del rischio sopportato ex ante. Risulta quindi particolarmente attuale la definizione generale di rischio di credito data da Dell'Amore (1965). "la probabilità che l'operazione non dia alcun contributo positivo alla redditività dell'azienda finanziatrice, o incida addirittura negativamente sui suoi risultati di esercizio".

⁷ Tra le analisi della redditività ex post degli impieghi bancari, ricordiamo Comana e Modena (1998), Sironi (1999b).

In questo lavoro intendiamo concentrarci su una nuova generazione di modelli che, a partire dall'ultimo scorcio degli anni '90, sono stati messi a punto e diffusi, nell'intento di conseguire stime attendibili del rischio associato a portafogli di crediti (tenendo conto tanto della concentrazione dei rischi, quanto dell'effettiva correlazione tra i diversi debitori).

In particolare, dopo aver delineato in un precedente saggio i meccanismi di funzionamento, i pregi ed i limiti del modello Creditmetrics, messo a punto dalla banca americana J.P. Morgan⁸, intendiamo concentrarci ora su una seconda metodologia, particolarmente interessante in quanto muove da presupposti teorici e matematici assolutamente diversi dalla prima⁹. Si tratta di Creditrisk+, un modello di credit risk management presentato nel 1997 da Credit Suisse Financial Products, società del gruppo svizzero Crédit Suisse - Winterthur.

La struttura del lavoro è la seguente: nel paragrafo 2 si presenta l'intuizione fondamentale che sta dietro al modello, e cioè che i crediti bancari possano essere considerati alla stregua di polizze assicurative ed analizzati attraverso metodologie proprie della matematica delle assicurazioni. Il paragrafo 3 è dedicato ad una presentazione dettagliata dei meccanismi di funzionamento del modello¹⁰, resi auspicabilmente più chiari con l'ausilio di alcuni esempi numerici. Il paragrafo 4 mostra come il modello Creditrisk+ possa essere utilizzato per calcolare riserve e patrimonio necessari a fronte di un portafoglio di crediti, e ne mette in luce la validità (ma anche le carenze) attraverso il confronto con un'ampia gamma di possibili situazioni reali. Il paragrafo 5 traccia un rapido bilancio di questo lavoro.

2. L'analogia assicurativa ed il modello Creditrisk+

2.1 I crediti bancari come polizze assicurative

Come si è detto, l'approccio di Creditrisk+ alla misura del rischio di credito fa perno su metodologie attuariali, già utilizzate da tempo nella determinazione delle riserve patrimoniali necessarie a fronte di un portafoglio di polizze assicurative.

In effetti, per comprendere come queste tecniche possano adattarsi al caso dei crediti bancari, è necessario guardare al portafoglio prestiti di una banca in modo leggermente diverso dall'usuale.

Siamo infatti abituati a considerare l'insolvenza di uno o più debitori come un fatto eccezionale (almeno sul piano logico, anche se nella pratica non si tratta certo un evento infrequente...): come una deviazione, in certo senso traumatica, rispetto allo schema contrattuale che lega banca e cliente (uno schema in base al quale il prestito dovrebbe concludersi con la restituzione del capitale, maggiorato di interessi)¹¹.

Proviamo invece a mutare prospettiva, e cominciamo col chiederci perché il cliente paga interessi sul prestito. Le risposte sono ovviamente molteplici, e già note agli studiosi di banca e di matematica finanziaria. Per cominciare, gli interessi sono necessari per rendere equivalenti due

⁸ Cfr. Resti, 1999, Gupton et al. (1997).

⁹ Non rientra tra gli obiettivi di questo lavoro un *confronto* tra le diverse metodologie. Sull'argomento, cfr. ad es. Crouhy et al. (2000), Gordy (2000), Finger (1998).

¹⁰ Alcuni risvolti tecnici del modello (come il calcolo delle risk contributions, e delle correlazioni tra crediti) verranno trascurati per concentrarsi sui suoi meccanismi fondamentali. Il lettore interessato può consultare la documentazione originaria del modello (cfr. Crédit Suisse First Boston, 1997)

¹¹ La stessa locuzione "onorare un prestito", comunemente usata nel linguaggio quotidiano, ci rappresenta l'insolvenza come uno stato in qualche misura "disonorevole". Viceversa, vedremo come, se si segue fino in fondo il paradigma assicurativo, il default (e la possibilità di addossare alla banca i costi del proprio dissesto finanziario) diventa una sorta di "diritto contrattuale" del cliente, acquistato dietro pagamento di un premio "nascosto" dentro gli interessi corrisposti sul debito...

prestazioni monetarie che avvengono in momenti diversi; sono, in altre parole, il “prezzo del tempo” che intercorrerà tra la concessione e la restituzione del credito. Per questa ragione, è normale che vengano pagati anche da debitori percepiti come sostanzialmente privi di rischio (come i più solidi tra gli stati sovrani). Nel caso di una banca, inoltre, gli interessi coprono (o dovrebbero coprire) i costi operativi necessari alla selezione ed al monitoraggio di una clientela. Infine, essi includono il “premio al rischio”, la ricompensa per l’incertezza connessa all’effettiva restituzione dell’importo pattuito. Concentriamoci, in particolare, su questa terza ed ultima componente.

Il concetto di “premio” ci riconduce, non a caso, al contesto assicurativo, dove con questo termine si indica la contropartita che una compagnia incassa dai clienti a fronte dell’eventualità di essere chiamata ad una prestazione monetaria aleatoria futura¹². Nel caso di una polizza sulla vita “caso morte”, ad esempio, la prestazione può essere data dal pagamento ai beneficiari di un certo capitale in caso di premorienza dell’assicurato. Tra i clienti di una compagnia d’assicurazione si realizza una implicita ripartizione del rischio, visto che tutti sostengono un costo certo (il premio), garantendosi così contro eventi più gravi, anche se scarsamente probabili.

Possiamo leggere in modo analogo anche il meccanismo che governa l’erogazione e la mancata restituzione dei crediti bancari (cfr. figura 2.1). I flussi di interessi percepiti dalla clientela, oltre a costituire il “prezzo del tempo” (per la parte spiegata dal tasso privo di rischio) e a concorrere alla copertura dei costi operativi, includono il premio pagato oggi a fronte dei rischi futuri. In un momento successivo (v. parte destra della figura) la banca verrà chiamata a saldare il conto delle loro insolvenze, rinunciando al capitale prestato ai clienti peggiori (fatto salvo il recupero degli importi coperti da eventuali garanzie).

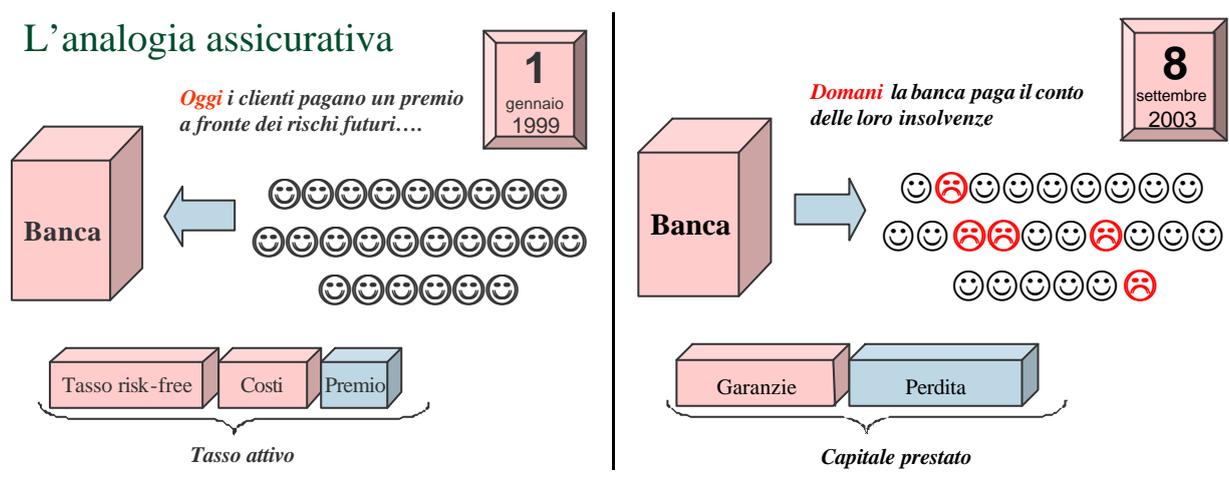


Figura 2.1: come funziona l’analogia assicurativa

Da questa lettura del rapporto banca-cliente discende una visione precisa del circuito che lega premi e perdite nella gestione finanziaria della banca. Infatti, mentre gli interessi calcolati al tasso risk-free vanno destinati alla copertura dei costi di provvista, e la quota legata a fronteggiare i costi operativi va correttamente imputata al conto economico di esercizio, il premio al rischio assolve, sostanzialmente, due funzioni, entrambe relative agli esercizi futuri. Come mostrato nella figura 2.2, il complesso dei premi riscossi dalla clientela deve infatti: a) compensare la banca per le perdite

¹² In effetti, anche i premi assicurativi contengono una componente prettamente finanziaria (quella che abbiamo definito “prezzo del tempo”) accanto a quella più prettamente di rischio. Per la suddivisione in premio al rischio e premio di risparmio del premio incassato da un assicuratore, cfr. ad es. Volpe di Prignano, 1985, p. 206.

attese sul suo portafoglio di crediti; b) compensare gli azionisti della banca per il capitale da essi fornito, a copertura di eventuali perdite superiori alle attese.

La prima componente ha a che fare con il concetto statistico di valore atteso, cioè con la media della distribuzione di probabilità delle perdite future originate da un dato insieme di prestiti; questa rappresenta, a tutti gli effetti, un costo da spendere in conto economico, attraverso un corrispondente volume di accantonamenti a riserva¹³. Tuttavia, poiché in un dato anno le perdite possono essere inferiori, ma anche superiori alle attese, è necessaria la seconda componente, un adeguato “cuscinetto” patrimoniale¹⁴ mantenuto dalla banca a fronte di questi scostamenti; anche il costo di questo capitale (che va remunerato in misura superiore al tasso risk-free) deve trovare capienza nei premi riscossi¹⁵.

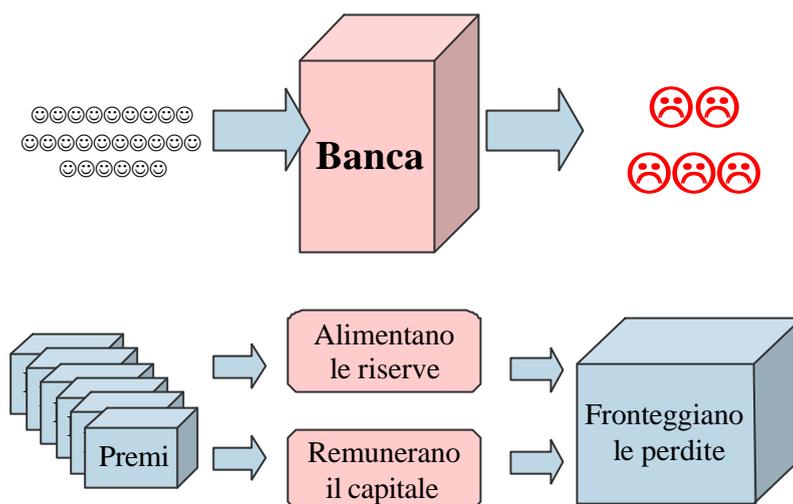


Figura 2.2: l'analogia assicurativa (seconda parte)

Questo modo di guardare all'attività di prestito delle banche ci pare stimolante, anche se è comprensibile che esso possa destare qualche riluttanza e perplessità¹⁶. Collocarsi in una simile prospettiva non richiede comunque di abbandonare totalmente la tradizionale visione “bancaria” (contrapposta, appunto, a quella “assicurativa”¹⁷) del processo di erogazione del credito. In particolare, osserviamo che:

- 1) E' vero che tra i clienti di un'assicurazione sussiste un meccanismo di risk-sharing, per cui è la generalità degli assicurati a pagare, pro-quota, il costo delle prestazioni future (nel nostro caso, il costo delle perdite su crediti). Ciò non significa, tuttavia, che la compagnia (o la banca)

¹³ Si può addirittura dire che tale componente rappresenta un costo, e non un rischio, per la banca, in quanto non ha natura aleatoria, bensì attesa.

¹⁴ Si tratta del “capitale a rischio” o “capitale assorbito” dal portafoglio crediti, di cui si è detto nel paragrafo 1. Il capitale a rischio rappresenta un concetto ampiamente diffuso nella letteratura attuariale, dove è noto anche come surplus, margine di solvibilità, riserva di rischio, riserva di equalizzazione (cfr. Daykin et al., 1994).

¹⁵ La stima di entrambe queste componenti richiede, ovviamente, la conoscenza della distribuzione delle possibili perdite future, cioè del livello di probabilità associato a tutti i possibili livelli di perdita, dal più ottimistico (perdite nulle, perché tutti i debitori onorano il prestito) fino al peggiore (perdite pari al totale degli importi prestati, al netto di eventuali garanzie). Proprio alla stima di questa distribuzione è dedicata la parte centrale del presente lavoro (cfr. § 3).

¹⁶ E' certamente difficile sforzarsi di pensare all'insolvenza come a una sorta di diritto contrattualmente garantito, al debitore-assicurato, dalla banca...

¹⁷ Cfr. Locatelli (1995).

diventi completamente neutrale rispetto ai livelli di rischio del proprio portafoglio di clienti, solo perché è possibile traslare sui premi il costo di un eventuale deterioramento nella qualità delle “polizze” sottoscritte. Per esempio, nel caso di assicurazioni sanitarie o sulla vita, la compagnia conserva un interesse a identificare, isolare ed eventualmente rifiutare le controparti contraddistinte da una probabilità di decesso, o di malattia, eccessivamente elevata. Anche all’interno dell’analogia assicurativa rimane dunque giustificata l’intensa attività di screening della clientela con cui le banche cercano di prevenire, ex-ante, il rischio di credito, piuttosto che limitarsi a calcolarne correttamente i costi futuri.

- 2) L’esistenza di una forma di coassicurazione non implica che il prezzo richiesto ai clienti per entrare a far parte dell’assicurazione debba essere identico per tutti. Al contrario, sarà comunque necessario “segmentare” correttamente la clientela, praticando prezzi differenziati in funzione del profilo di rischio dell’assicurato (si pensi, ad esempio, alle polizze sulla responsabilità civile o sui furti, dove è ormai prassi diffusa che il livello del premio vari in funzione di una “griglia” di caratteristiche soggettive). Un sistema di premi eccessivamente uniforme e indifferenziato, infatti, reca con sé l’eventualità (o, piuttosto, la certezza) di assistere a fenomeni di selezione avversa, per cui soltanto i clienti più rischiosi percepiscono come equo, o addirittura vantaggioso, il prezzo del servizio, mentre la clientela di migliore qualità è oggetto dello “cherry picking” operato dalle compagnie concorrenti attraverso listini più precisi (e dunque offerte maggiormente vantaggiose per chi le riceve e tuttavia adeguatamente remunerative per chi le propone). Guardare al portafoglio crediti delle banche attraverso la “lente” assicurativa non equivale quindi a suggerire che “tutti paghino comunque per tutti”, in modo generalizzato e indistinto; al contrario, proprio l’analogia con le polizze ribadisce la necessità di fondare il pricing dei prestiti bancari su un reticolo adeguatamente fine di segmenti o clusters qualitativamente omogenei.

2.2 Creditrisk+: caratteristiche e limiti

L’analogia assicurativa contiene dunque, a nostro avviso, interessanti elementi di stimolo intellettuale. Da ciò è derivato il desiderio di approfondire, e quindi di presentare, in questo lavoro, un modello di credit risk management basato su logiche attuariali. In particolare, si dedicherà spazio a Creditrisk+, la metodologia di misura e gestione del rischio creditizio messa a punto e diffusa da Credit Suisse Financial Products¹⁸, cercando di presentarne in modo chiaro ed esaustivo i meccanismi tecnici di base.

A tal fine, verranno ripresi e sviluppati numerosi passaggi della documentazione tecnica diffusa da Credit Suisse Financial Products, presentando anche alcuni esempi numerici di calcolo basati su un semplice portafoglio di prova, composto da una decina di crediti. Nell’ultima parte del lavoro, il modello verrà utilizzato per stimare le possibili perdite future su un portafoglio più realistico, composto da alcune centinaia di prestiti. L’obiettivo di raccontare in modo quanto più possibile chiaro e fedele la metodologia Creditrisk+ non ci impedirà, peraltro, di metterne in luce alcuni limiti, anche severi.

Prima di affrontare, nel prossimo paragrafo, la struttura matematica del modello, desideriamo ricordarne brevemente le principali caratteristiche; ciò ci consentirà di cominciare a tratteggiarne anche alcune carenze rispetto ai principali “concorrenti”¹⁹. In particolare, ci soffermeremo sui seguenti aspetti di Creditrisk+ (che verranno brevemente spiegati nel seguito di questo paragrafo):

- a) E’ una metodologia per la stima della distribuzione delle *perdite* future;

¹⁸ Cfr. Credit Suisse Financial Products, 1997.

¹⁹ Un’introduzione a Creditrisk+ e ai principali modelli alternativi è offerta, tra gli altri, da Bellucci et al. (1999) e Saita (2000).

- b) considera il *rischio di controparte*, mentre dedica meno attenzione ai rischi di esposizione e di recupero;
- c) adotta una distribuzione *binomiale* degli eventi creditizi;
- d) postula che le diverse controparti siano *indipendenti* tra loro per ogni dato scenario macroeconomico;
- e) richiede *dati di input* in parte diversi da quelli necessari per implementare altri modelli di credit risk management.

a) Creditrisk+ concentra la propria attenzione sulla stima delle perdite future. Si tratta di un approccio ampiamente condivisibile e coerente con gli obiettivi del credit risk management, così come li abbiamo delineati nei paragrafi precedenti; non si tratta, tuttavia, del solo approccio possibile. In alternativa, infatti, sarebbe possibile guardare alle variazioni nel valore attuale dei crediti (o nel loro valore di mercato, se si tratta di crediti quotati su un mercato secondario).

Il valore attuale di un credito è funzione dei flussi di cassa attesi e della curva dei tassi utilizzata per scontarli; questa curva dei tassi incorpora uno spread che è funzione: i) del grado di liquidità del mercato (eventuali shock di liquidità possono accrescere temporaneamente i tassi); ii) del merito creditizio del debitore (cioè, in ultima analisi, della probabilità che il debitore possa risultare insolvente nei diversi stadi di vita del debito).

La distribuzione delle perdite cattura il secondo fattore, ma non il primo. In altri termini, se uno shock sui tassi (dovuto, ad esempio, a un fenomeno di *flight to quality*) dovesse raddoppiare lo spread richiesto dal mercato per prestiti ad una certa classe di debitori rischiosi (lasciando costante la loro probabilità di insolvenza), la distribuzione delle perdite non ne recherebbe traccia, mentre il valore di mercato dei prestiti (già erogati prima dello shock sullo spread) registrerebbe consistenti minusvalenze.

Lavorando sulla distribuzione delle perdite, e non dei valori attuali, Creditrisk+ perviene quindi ad una stima del rischio di credito che è “isolata” rispetto ad eventuali shock negli spread di mercato; si può discutere se ciò rappresenti o meno un tratto desiderabile. Nell’opinione di chi scrive, tuttavia, non pare saggio che il valore di un portafoglio di crediti bancari vari in funzione dei mark-up richiesti dal mercato, se questi crediti non hanno accesso ad un mercato secondario e sono destinati ad essere conservati nel bilancio della banca fino alla loro scadenza naturale. Da questo punto di vista, dunque, il riferimento alla distribuzione delle perdite appare sostanzialmente corretto per la maggior parte dei prestiti bancari, per i quali un *mark-to-market* rigoroso, oltre che difficile, sarebbe scarsamente giustificabile sul piano teorico. E’ altresì vero, tuttavia, che se la diffusione degli strumenti di titolarizzazione e cessione del rischio di credito (ad esempio attraverso strumenti derivati) dovesse assumere le caratteristiche di un mercato di massa, diverrebbe più corretto, ed anzi urgente, incorporare nel valore del portafoglio crediti (e nella misura delle possibili minusvalenze future) anche l’effetto dei possibili cambiamenti negli spread.

b) Se si prescinde dal rischio legato all’evoluzione degli spread (che, come si è visto, non trova spazio in un modello basato sulla distribuzione delle perdite), il rischio di credito può essere logicamente scomposto in tre componenti, (come evidenziato da una recente survey sulle metodologie di credit risk management maggiormente diffuse in ambito internazionale²⁰). Più precisamente, l’eventuale perdita registrata da una banca su un prestito può essere vista come il prodotto di: i) *default* (una variabile binaria che vale uno in caso insolvenza, evento che può essere

²⁰ Cfr. BRI (1999).

più o meno probabile); ii) *loan equivalent exposure*, cioè importo effettivamente prestato nel momento in cui si verifica il default; iii) *loss given default* (perdita, per lira prestata, in caso di insolvenza).

Risulta palese la natura stocastica, cioè incerta, del default (che, per definizione, può verificarsi o meno); meno evidente è invece come anche le altre due componenti siano intrinsecamente stocastiche. La *exposure* può non essere costante perché, ad esempio, esistono linee di credito irrevocabili da cui il debitore può attingere (e tenderà a farlo in misura crescente all'aggravarsi delle proprie difficoltà finanziarie). La *loss given default* (detta anche *severity*) è necessariamente incerta, visto che il valore degli attivi di un'impresa fallita (e la stessa esigibilità delle eventuali garanzie) non può essere previsto senza margini di errore, e non è dunque possibile stimare con certezza quale percentuale del credito perduto potrà essere recuperata dalla banca.

Di conseguenza, tutte e tre queste componenti concorrono a determinare l'alea che circonda l'ammontare delle perdite future. Non tutti i modelli di credit risk management, tuttavia, ne tengono conto in modo esaustivo. In particolare, Creditrisk+ si concentra sul primo fattore, ovvero sul default, mentre l'importo prestato e la severity sono considerati noti a priori²¹. Ne consegue una possibile sottostima del rischio, che induce a considerare con qualche cautela le prescrizioni del modello. E' comunque possibile, una volta preso atto di questa limitazione, sforzarsi di porvi rimedio. Per esempio, è possibile utilizzare la struttura logica del modello e fare ricorso a simulazioni Montecarlo per verificare le conseguenze di variazioni nella severity o nell'effettiva esposizione creditizia.

c) In Creditrisk+ si suppone che un credito evolva in modo binomiale: al termine di un dato arco temporale il prestito può essere ancora in bonis oppure aver dato luogo a una perdita. Tutti i possibili stati del mondo sono quindi riassunti dal binomio "sopravvivenza/insolvenza": non esistono situazioni intermedie e, ciò che più conta, tutti i crediti non insolventi sono considerati uguali.

Questa scelta è diretta conseguenza delle origini "assicurative" del modello: nella matematica delle assicurazioni, infatti, la compagnia è chiamata a pagare la prestazione pattuita con il cliente solo quando si verifica un determinato evento (morte dell'assicurato, incendio, disastro aereo, ecc.). Le tecniche per il dimensionamento ottimale delle riserve e dei premi assicurativi sono dunque fondate su fenomeni tipicamente binomiali.

In realtà, un credito vivo può essere considerato esigibile con diversi gradi di certezza: la durata residua del credito e la solidità finanziaria del debitore concorrono a rendere più o meno probabile il suo rimborso. Per questo motivo, metodologie diverse da Creditrisk+ (come Creditmetrics, diffusa dalla banca americana J.P. Morgan²²) preferiscono descrivere le possibili evoluzioni di un prestito con una distribuzione multinomiale, dove accanto all'insolvenza del prestatore trova posto una pluralità di stati vivi, ognuno contraddistinto da un diverso livello di rischiosità (quindi da un diverso valore del credito, o da differenti aspettative circa l'ammontare delle perdite future).

Il ricorso ad una distribuzione multinomiale appare particolarmente utile quando, per contenere la complessità degli algoritmi utilizzati nella stima della distribuzione delle perdite, si ritiene utile limitare ad un arco di tempo relativamente breve l'orizzonte temporale del modello. Per esempio, in

²¹ L'ipotesi che la *loss given default* possa essere considerata deterministica è quanto meno discutibile, perché sottintende che il valore di realizzo delle garanzie ed il periodo di tempo necessario per la loro effettiva escussione siano noti con certezza alla banca. Viceversa, proprio la sovrastima del valore delle garanzie rappresenta un rischio particolarmente insidioso, come mostra, ad esempio, il caso dei *real estate loans* erogati dalle casse di risparmio statunitensi (ma anche da molte banche commerciali inglesi e francesi) nel corso degli anni '80.

²² Gupton et al. (1997)..

presenza di un portafoglio composto da finanziamenti di scadenza diversa, comprensivo di posizioni a medio e lungo termine, è possibile decidere di limitarsi a considerare solo il livello delle perdite che si manifesteranno alla fine del primo anno.

In una simile evenienza, se si considerano soltanto insolvenza e sopravvivenza, tutti i crediti rimasti vivi dopo dodici mesi verranno considerati alla stregua di importi certi, giungendo ad un risultato intrinsecamente impreciso. Viceversa, un modello di tipo multinomiale consentirà di registrare la diversa qualità dei prestiti ancora in bonis, e di tenere conto di eventuali variazioni di valore nel portafoglio dovute ad una riduzione dell'affidabilità dei debitori.

Naturalmente, un modello binomiale risulta, a parità di altre condizioni, meno complesso dal punto di vista matematico; è dunque relativamente più facile estenderne l'orizzonte temporale fino ad abbracciare l'intero arco di vita dei prestiti appartenenti al portafoglio considerato²³.

d) Creditrisk+ ipotizza l'*indipendenza condizionale* dei singoli crediti. Avremo modo di ritornare diffusamente su questa ipotesi, di cui ci limitiamo a chiarire, per ora, i meccanismi fondamentali. In pratica, si assume che, per ogni possibile stato del mondo, i crediti presenti nel portafoglio di una banca siano incorrelati, cioè che il fallimento di un debitore non dipenda, in nessun modo, da quello degli altri.

Apparentemente, ciò equivale a negare la realtà, visto che l'esperienza ed il senso comune suggeriscono che i fallimenti delle imprese a cui le banche concedono credito non sono di norma isolati e indipendenti, ma tendono a prodursi a "ondate", man mano che lo stato di dissesto si propaga da un cliente all'altro.

Questa ipotesi di indipendenza vale tuttavia solo per le distribuzioni condizionali (cioè conseguenti ad un dato stato del mondo); se si allarga il quadro fino a ricomprendere tutti i possibili stati del mondo futuri, allora la distribuzione complessiva ("non condizionale") delle perdite mostra un certo grado di correlazione tra i diversi debitori, visto che tutti tendono a reagire in modo simile ai diversi stati di natura.

Consideriamo un semplice esempio: la tavola 2.1 mostra le probabilità di insolvenza della ditta Rossi e della ditta Bianchi. In particolare, il pannello superiore è valido quando l'economia è in espansione. La probabilità che entrambe falliscano contemporaneamente è esattamente pari al prodotto delle probabilità di default individuali; in altri termini, la correlazione tra Bianchi e Rossi è apparentemente nulla, e i due debitori sono indipendenti. Nel pannello inferiore è riportato invece il caso di economia in recessione: di nuovo la probabilità congiunta è il semplice prodotto di quelle marginali, ma tutti i valori sono cresciuti (tanto la ditta Rossi che la ditta Bianchi risentono sfavorevolmente di una recessione, cioè reagiscono in modo simile a un diverso stato del mondo).

²³ Per vedere come ciò sia possibile nel caso di Creditrisk+, cfr. l'appendice C.

Tavola 2.1:
**Probabilità di default di due debitori
in due possibili stati del mondo**

		Bianchi		
		<i>Fallisce</i>	<i>Non fallisce</i>	<i>Totale</i>
<i>(a) Espansione</i>				
Rossi	<i>Fallisce</i>	0.08%	1.92%	2%
	<i>Non fallisce</i>	3.92%	94.08%	98%
	<i>Totale</i>	4%	96%	100%
<i>(b) Recessione</i>				
		Bianchi		
		<i>Fallisce</i>	<i>Non fallisce</i>	<i>Totale</i>
Rossi	<i>Fallisce</i>	0.60%	5.40%	6%
	<i>Non fallisce</i>	9.40%	84.60%	94%
	<i>Totale</i>	10%	90%	100%

Se, per semplicità, ammettiamo che espansione e recessione siano i soli stati del mondo possibili, ognuno con probabilità pari a $\frac{1}{2}$ allora possiamo costruire la distribuzione non condizionale delle probabilità di default, che è riportata nella tavola 2.2. Dai dati della tavola è possibile ricavare il coefficiente di correlazione esistente tra il default della ditta Rossi e quello della ditta Bianchi; questo, lungi dall'essere nullo, risulta positivo e superiore a 1%. Abbiamo dunque verificato come sia possibile, considerando più distribuzioni condizionali a correlazione nulla, introdurre una covarianza positiva tra i dissesti di più prenditori²⁴.

Tavola 2.2:
Probabilità di default non condizionale di due debitori

		Bianchi		
		<i>Fallisce</i>	<i>Non fallisce</i>	<i>Totale</i>
Rossi	<i>Fallisce</i>	0.34%	3.66%	4%
	<i>Non fallisce</i>	6.66%	89.34%	96%
	<i>Totale</i>	7%	93%	100%

Questo approccio è tipico di Creditrisk+, ma è utilizzato anche in altri modelli di credit risk management. Per esempio, nel modello CreditPortfolioView sviluppato da McKinsey & Co.²⁵ si ipotizza che i tassi di insolvenza (cioè le probabilità di default) dei singoli debitori rispondano (con elasticità più o meno spiccate) ad una serie di fattori macroeconomici, quali l'inflazione, la disoccupazione o il tasso di crescita del prodotto interno lordo. In questo modo, oltre a poter costruire una distribuzione delle insolvenze non condizionale, che abbraccia tutti i possibili stati di natura, diventa possibile concentrarsi su uno o più scenari ritenuti particolarmente verosimili sulla base di un insieme di previsioni macroeconomiche.

Completamente diversa appare invece l'impostazione metodologica di Creditmetrics, che lavora direttamente su una distribuzione non condizionale, addossando agli utilizzatori del modello l'onere di specificare in modo esplicito la matrice delle correlazioni empiricamente valide per ogni possibile coppia di imprese affidate. Peraltro, recentemente gli stessi autori di Creditmetrics hanno, in qualche misura, recepito nel loro modello la possibilità di fare ricorso a distribuzioni

²⁴ La tavola 2.2 rappresenta un esempio elementare di "distribuzioni mista", ottenuta combinando più distribuzioni condizionali. Per un'introduzione matematica, cfr. Daykin et. al. (1994), in particolare il capitolo 2.

²⁵ Cfr. McKinsey (1998).

condizionali, riuscendo tra l'altro a ridurre i tempi di calcolo necessari per la stima del capitale a rischio, soprattutto nel caso di portafogli composti da un elevato numero di piccole posizioni²⁶.

e) Un'ultima considerazione riguarda i dati di input necessari per il funzionamento di Creditrisk+. In effetti, tutti i modelli per la misura del rischio di credito messi a punto negli ultimi anni sono caratterizzati da un elevato fabbisogno di informazioni, che ne limita l'applicabilità pratica e, talvolta, la stessa affidabilità. Per alimentare tali modelli non è solo necessario disporre di databases molto particolareggiati e "collaudati" su un arco di tempo sufficientemente vasto: è altresì indispensabile disporre di stime attendibili per variabili che non possono essere direttamente osservate (ad esempio, la probabilità di insolvenza dei singoli prestiti); vi è quindi il rischio che errori nella fase di stima dei parametri possano condurre a misure di rischio errate o fortemente volatili. Anche per questo, gli autori di Creditrisk+ ritengono che il loro modello abbia un punto di forza nella capacità di funzionare basandosi su un insieme di dati di input particolarmente ridotto.

In effetti, Creditrisk+ non richiede talune informazioni che risultano invece indispensabili per poter implementare correttamente altre metodologie: in particolare, diversamente dai modelli basati sul valore di mercato del portafoglio crediti, non comporta la stima di curve dei tassi ad hoc per prenditori di differente qualità (stima che può risultare particolarmente onerosa ed incerta se si ha a che fare con un portafoglio di imprese che non emettono direttamente debito sul mercato). Inoltre, come osservato sub d), non richiede all'utente di specificare in modo esplicito la matrice delle correlazioni tra i diversi debitori, che rappresenta invece un passaggio complesso e delicato nell'implementazione di alcuni algoritmi concorrenti, come il già citato Creditmetrics.

Tuttavia, anche Creditrisk+ impone all'utilizzatore la costruzione di una base informativa tutt'altro che semplice. In particolare, come si vedrà meglio nel prossimo paragrafo, è necessario indicare, per ogni singolo credito, in che modo la sua probabilità di default dipenda dai principali fattori macroeconomici che governano il ciclo delle sofferenze e dei dissesti finanziari. Questi fattori, inoltre, devono essere resi ortogonali attraverso apposite procedure statistiche (quali l'analisi fattoriale o l'analisi delle componenti principali), e perdono quindi la connotazione di semplici variabili macroeconomiche (come l'inflazione, il cambio, il prodotto nazionale), diventando quindi meno intuitive e meno facili da trattare.

3. Il modello Creditrisk+ passo dopo passo

3.1 Prevedere il "decesso" di un credito

Immaginiamo di avere erogato un prestito bancario e di conoscere la probabilità di insolvenza dell'affidato su un dato arco di tempo²⁷. In concreto, questa probabilità dovrà essere approssimata con una procedura di rating²⁸ che consenta di ricondurre ogni debitore ad sottogruppo di crediti qualitativamente omogenei; ad ogni classe di rating farà riscontro un dato (storico) circa l'incidenza delle insolvenze passate, che potrà essere utilizzato come stima della probabilità di crisi future²⁹.

²⁶ Cfr. Finger (1999).

²⁷ Immagineremo che tale periodo di tempo, uguale per tutti i crediti in portafoglio, sia pari ad un anno. Sul passaggio a orizzonti di rischio diversi si ritornerà nell'appendice C.

²⁸ Cfr. ad es. De Laurentis (1999a e 1999b).

²⁹ La disponibilità di dati storici sufficientemente significativi costituisce in effetti un prerequisito per un'efficace implementazione delle metodologie di controllo del rischio di credito, e l'approccio attuariale di cui si tratta in questo lavoro non rappresenta un'eccezione. E' quindi positivo che vadano infittendosi le iniziative rivolte a dotare le banche italiane di un patrimonio informativo sufficientemente vasto e finalizzato ad alimentare simili modelli di analisi: tra le iniziative recenti, vanno ricordate con soddisfazione quelle della Centrale dei Bilanci e della Banca d'Italia, volte a

Possiamo rappresentare l'evento "insolvenza del i -esimo debitore" con una variabile casuale discreta, che vale 1 in caso di default (con probabilità p_i), 0 altrimenti (con probabilità $1 - p_i$). La distribuzione di probabilità di questa variabile casuale potrà essere sintetizzata dalla sua funzione generatrice delle probabilità (f.g.p., cfr. appendice 1), cioè da

$$F_i(z) = z^0(1 - p_i) + z^1 p_i = 1 + p_i(z - 1) \quad [3.1]$$

Si tratta di una funzione della variabile ausiliaria z dove il termine di grado n -esimo rappresenta la probabilità di assistere a n default (in questo caso, come si è detto, n può assumere soltanto i valori 0 e 1). Se anziché un solo debitore ne esistono molti (dicamo m), e se possiamo ritenere, in prima approssimazione, che l'insolvenza di ogni debitore sia indipendente da quella degli altri, allora la funzione generatrice delle probabilità dell'evento somma ("numero di default che si verificano a partire da m debitori") è semplicemente la produttoria delle funzioni generatrici dei singoli default (cioè di m funzioni uguali alla 3.1). In pratica, la f.g.p. del numero totale di default sarà

$$F(z) = \prod_{i=1}^m F_i(z) = \prod_{i=1}^m (1 + p_i(z - 1)) = e^{\sum_{i=1}^m \log[1 + p_i(z - 1)]} \quad [3.2]$$

A questo punto, per poter procedere, dobbiamo accettare un'approssimazione. E' noto che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$$

In questo caso, $x = p_i(z - 1)$ può essere considerato prossimo allo zero se p_i è ragionevolmente piccolo. Di conseguenza, se riteniamo che la probabilità di insolvenza dei singoli debitori sia molto bassa, possiamo riscrivere la f.g.p. del numero totale di default come:

$$F(z) \cong e^{\sum_{i=1}^m p_i(z - 1)} = e^{m(z - 1)} \quad [3.3]$$

dove $m = \sum_{i=1}^m p_i$ rappresenta il numero totale di default attesi³⁰ (e quindi è, per definizione, la media della variabile casuale "numero di default totali").

Consideriamo ora l'espansione in serie di McLaurin della $F(z)$ così approssimata:

$$\begin{aligned} F(z) &= F(0) + F'(0)z + F''(0)\frac{z^2}{2} + \dots + F^{(n)}(0)\frac{z^n}{n!} + \dots = \\ &= e^{-m} + e^{-m} \cdot m z + e^{-m} \frac{m^2 z^2}{2} + \dots + e^{-m} \frac{m^n z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-m} m^n z^n}{n!} \end{aligned} \quad [3.4]$$

Il generico coefficiente di z^n , cioè

produrre serie storiche dei tassi di insolvenza di gruppi di debitori omogenei (appartenenti alla stessa classe di rating nel primo caso, segmentati per settore d'attività, area geografica e classe dimensionale nel secondo).

³⁰ Consideriamo ad esempio un portafoglio di cinquecento crediti, ognuno con probabilità di default pari a 2%. E' evidente che la somma delle probabilità di default (qui, semplicemente $500 \cdot 2\% = 10$) fornisce il numero di insolvenze attese dal portafoglio.

$$p(n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} \quad [3.5]$$

rappresenta la probabilità che si verificano n insolvenze.

Vediamo come la [3.5] possa essere applicata ad un semplice esempio pratico. La tavola 3.1 riporta un portafoglio di tre crediti; ad ognuno è stata assegnata una certa probabilità di insolvenza; il totale (μ) è il numero di default attesi in un anno (0,035). Ne segue che la probabilità di assistere a 0 default è pari a:

$$p(0) = \frac{e^{-0,035} 0,035^0}{0!} = e^{-0,035} = 96,56\%$$

Analogamente, la probabilità di assistere ad una sola insolvenza (non sappiamo se da parte della ditta Bianchi, Rossi o Verdi) è pari a:

$$p(1) = \frac{e^{-0,035} 0,035^1}{1!} = 0,035 e^{-0,035} = 3,38\%$$

In modo analogo si ricavano le probabilità associate a due e addirittura tre insolvenze (rispettivamente: 0,059% e 0,001%).

Tavola 3.1
Esempio con tre crediti

<i>i</i>	<i>Debitore</i>	<i>Probabilità di default (p_i)</i>
1	Rossi	1%
2	Bianchi	2%
3	Verdi	0.5%
N. di default attesi (μ):		0.035

I valori complessivamente ridotti delle probabilità di default di questo esempio ci hanno permesso di utilizzare con esiti soddisfacenti l'approssimazione mostrata nella [3.3]. Va sottolineato, tuttavia, che il grado di accuratezza dell'approssimazione diventa sempre meno accettabile al crescere delle probabilità di insolvenza. La tavola 3.2 mostra come, se il merito di credito dei tre debitori fosse peggiore, le probabilità vere si discosterebbero, anche sensibilmente, da quelle stimate attraverso la [3.5]. In effetti, la f.g.p. indicata nella [3.4] è quella di una variabile casuale di Poisson, o degli eventi rari, utilizzata in statistica per modellare situazioni in cui la cui probabilità di realizzazione di ogni singolo evento è trascurabile³¹.

³¹ I lettori più attenti si saranno accorti che, nel caso 3 riportato nella tavola, il totale delle probabilità non somma a 100%, ma ad un valore inferiore. Ciò dipende dal fatto che l'approssimazione implicita nella [3.5] conduce ad assegnare una probabilità positiva, e prossima all'uno per cento, anche ad un evento impossibile, e cioè all'insorgere di quattro default in un portafoglio costituito da solo tre crediti! Per questo ci è parso importante attirare l'attenzione del lettore sul valore approssimato dei risultati conseguibili con la tecnica CreditRisk+.

Tavola 3.2

Esempi di cattiva approssimazione

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>			
Probabilità di default dei singoli debitori						
Rossi	1.0%	5.0%	25.0%			
Bianchi	2.0%	10.0%	50.0%			
Verdi	0.5%	2.5%	12.5%			
Probabilità di assistere a n default						
	<i>Stimate</i>	<i>Vere</i>	<i>Stimate</i>	<i>Vere</i>	<i>Stimate</i>	<i>Vere</i>
0	96.6%	96.5%	83.9%	83.4%	41.7%	32.8%
1	3.4%	3.4%	14.7%	15.8%	36.5%	48.4%
2	0.1%	0.0%	1.3%	0.8%	16.0%	17.2%
3	0.0%	0.0%	0.1%	0.0%	4.7%	1.6%

Ancora a proposito della [3.5], osserviamo che essa non richiede di specificare il numero di crediti o le probabilità di default dei singoli prenditori (che pure abbiamo riportato nelle tavole, per rendere più comprensibili gli esempi), ma semplicemente il numero μ di insolvenze attese entro l'orizzonte di rischio prescelto (ad esempio, entro un anno).

A conclusione di questa sezione, riportiamo un esempio leggermente più complesso, che ci accompagnerà nel seguito di questo paragrafo: si tratta di un portafoglio di tredici crediti, per i quali abbiamo indicato le probabilità di default individuali (tav. 3.3) e la distribuzione della variabile casuale "numero totale di default" (figura 3.1) ottenuta applicando la [3.5] (per rendere più leggibile il grafico, si sono omessi i valori dell'asse verticale compresi tra 20% e 80%). Osserviamo che l'evento maggiormente probabile è dato dalla "sopravvivenza" di tutti di prestiti, seguito dal caso in cui un solo prenditore risulta insolvente. Gli scenari in cui più di due prestiti risultano contemporaneamente insolventi sono talmente improbabili che gli istogrammi ad essi associati risultano a mala pena visibili.

Tavola 3.3

Esempio con 13 crediti

<i>i</i>	<i>Debitore</i>	<i>Probabilità di default (p_i)</i>
1	Rossi	1%
2	Bianchi	2%
3	Verdi	0.50%
4	Gialli	2%
5	Neri	1%
6	Mori	1%
7	Grossi	1%
8	Piccoli	2%
9	Astuti	2.50%
10	Codardi	2%
11	Stupazzoni	0.50%
12	Molinari	2%
13	Vasari	1%
N. di default attesi (μ):		0.1850

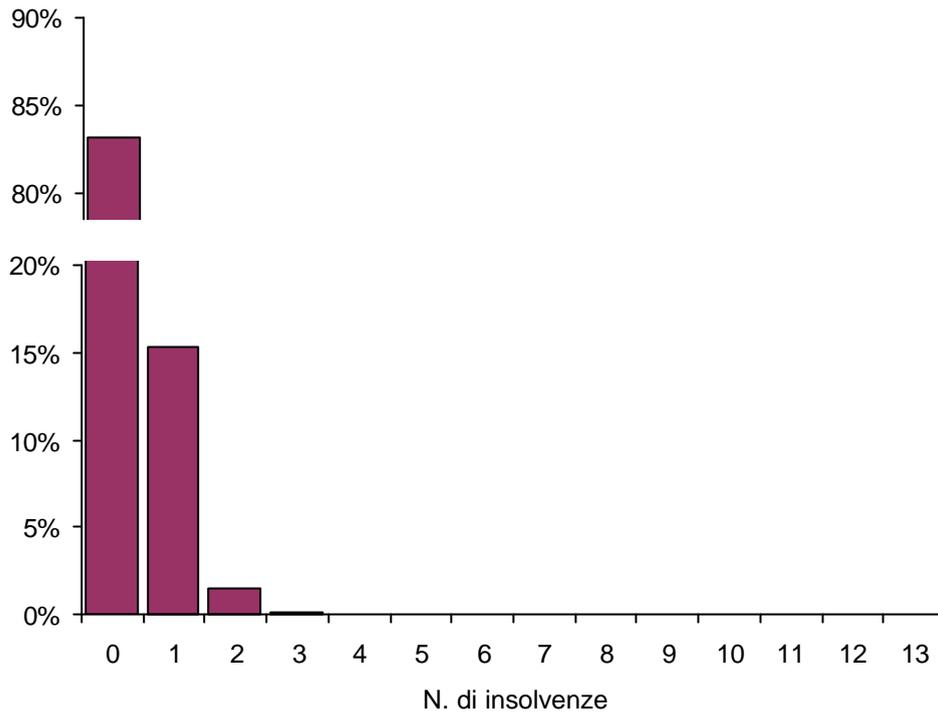


Figura 3.1: probabilità associate al numero di insolvenze in un portafoglio di 13 crediti

Prima di procedere, soffermiamoci su un'ultima, importante precisazione: la [3.2] è stata ottenuta ipotizzando che l'insolvenza di ogni debitore sia indipendente da quella degli altri. In realtà è noto come le insolvenze bancarie siano un fenomeno ciclico, e come i debitori tendano a fallire in modo correlato gli uni con gli altri. La condizione di indipendenza appare quindi eccezionalmente irrealistica, e tale scarsa aderenza al mondo reale sembrerebbe tale da minare nel profondo l'intero modello presentato. In effetti, sappiamo (cfr. § 2.2) che è possibile ipotizzare l'indipendenza tra debitori nella distribuzione di probabilità condizionale ad un dato stato del mondo, e tuttavia ottenere una distribuzione non condizionale contraddistinta da una certa correlazione tra crediti. In particolare, nel § 3.3 vedremo come sia possibile includere nel modello il fatto che l'insolvenza dei singoli prestiti dipende da una serie di fattori. Prima, tuttavia, è necessario mostrare come, oltre che a prevedere il numero dei debitori insolventi, questa metodologia possa servire a derivare una stima delle possibili perdite.

3.2 Prevedere le perdite associate al decesso dei diversi crediti

Il numero di debitori in default rappresenta una variabile casuale di scarso interesse per chi gestisce i rischi di una banca: ben più significativa è la misura del danno economico conseguente da queste insolvenze, cioè delle perdite su crediti associate.

Le perdite su crediti rappresentano una variabile monetaria, libera di assumere un'infinità di valori su una scala continua; apparentemente, quindi, il modello sviluppato nel paragrafo precedente, basato su una variabile discreta, non può essere di grande utilità.

Per continuare ad avvalersi di quel modello, è tuttavia possibile cercare di descrivere il portafoglio crediti della banca attraverso una scala discreta, raggruppando le esposizioni (cioè le perdite associate all'insolvenza dei diversi clienti³²) in un numero limitato di "gradini".

La tavola 3.4 mostra il portafoglio di 13 debitori già descritto nel paragrafo precedente: per ognuno, abbiamo riportato l'ammontare del prestito e della perdita attesa in caso di default. Quest'ultimo valore è riesposto anche in versione arrotondata, cioè rapportata ad una scala discreta, usando come unità di misura (L) un valore di 10.000 euro.

Tavola 3.4
Portafoglio di 13 debitori con importi e perdite attese

#	Nome	Probabilità di default (p_i)	Importo (L_i)	Importo arrotondato* (v_i)	Perdita attesa (I_i)
1	Rossi	1%	11,000	1	110
2	Bianchi	2%	12,000	1	240
3	Verdi	0.50%	11,000	1	55
4	Gialli	2%	9,500	1	190
5	Neri	1%	22,000	2	220
6	Mori	1%	21,000	2	210
7	Grossi	1%	19,500	2	195
8	Piccoli	2%	20,800	2	416
9	Astuti	2.50%	33,000	3	825
10	Codardi	2%	28,500	3	570
11	Stupazzoni	0.50%	31,000	3	155
12	Molinari	2%	30,800	3	616
13	Vasari	1%	29,000	3	290
Totale		18.50%	279,100		4.092

* usando come unità di misura $L = 10.000\text{€}$

Osserviamo che:

1. Con l'arrotondamento diventa possibile assegnare tutti i crediti in portafoglio ad un insieme finito di m (qui: 3) bande: la prima include i prestiti di ammontare $v_1=1$ (righe da 1 a 4), la seconda quelli di importo $v_2=2$ (da 5 a 8), l'ultima quelli con esposizione $v_3=3$ (da 9 a 13).
2. Abbiamo supposto che la perdita attesa sia data dal prodotto tra importo prestato (esposizione) e probabilità di default, assumendo implicitamente che, in caso di insolvenza, la percentuale di recupero (recovery rate) sia nulla. Sarebbe possibile, tuttavia, introdurre valori di $\tilde{e}_i < p_i L_i$, a indicare tassi di recupero positivi³³.

³² Come si ricorderà dal § 2.2, in generale l'esposizione indica l'ammontare totale del prestito in essere al momento dell'insolvenza: di questo, si presume che una certa percentuale ("recovery rate") possa essere recuperata attraverso l'escussione di garanzie o attendendo la conclusione delle procedure di liquidazione coatta, mentre la restante parte rappresenta la perdita vera e propria ("severity", o "loss given default"). Nel seguito di questo paragrafo, invece, supporremo che l'esposizione e la perdita in caso di default coincidano (cioè che la loss given default sia sempre pari al 100%).

³³ E' possibile incorporare la *recovery rate* R_i sull' i -esimo credito intervenendo direttamente sull'esposizione, indicando con $L_i(1-R_i)$ anziché con L_i l'ammontare prestato su cui operare il banding (è questa la strada indicata nel documento tecnico del CR+ e ripresa da Saita, 2000) In alternativa, come accennato nel testo, si può porre pari a $I_i = p_i L_i (1-R_i)$ la perdita attesa per lira prestata. E' comunque necessario considerare, R_i come una grandezza deterministica nota a priori; se, correttamente, si desidera trattarlo come una variabile stocastica, eventualmente correlata con p_i , è necessario abbandonare il modello CreditRisk+ e adottare schemi più sofisticati, eventualmente basati su simulazioni Montecarlo.

3. E' possibile riscrivere anche le perdite attese come $\mathbf{e}_i \equiv I_i/L$, adottando come nuova unità di misura L . In questo caso, diversamente che per v_i , non è necessario operare arrotondamenti.

4. Per ogni banda j , definiamo $\mathbf{m}_j \equiv \sum_{i|v_i=v_j} \frac{\mathbf{e}_i}{v_i}$, cioè il *numero di default attesi* nella banda³⁴. Di

conseguenza, $\mathbf{m} \equiv \sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j$ indica il numero di default attesi dall'intero portafoglio.

5. Sempre per ogni banda, $\mathbf{e}_j \equiv \sum_{i|v_i=j} \mathbf{e}_i$ indica la perdita totale attesa in quella banda.

E' ora possibile applicare la [3.5] ai crediti di una qualsiasi banda. Seguendo ragionamenti analoghi a quelli sviluppati nel paragrafo precedente si ha che

$$p(n) = \frac{e^{-\mathbf{m}_j} \mathbf{m}_j^n}{n!} \quad [3.6]$$

descrive la probabilità di assistere a n default all'interno della j -esima banda, ovvero di incorrere in una perdita di ammontare approssimativamente uguale a nv_jL .

Analogamente, possiamo dire che

$$p(nv_j) = \frac{e^{-\mathbf{m}_j} \mathbf{m}_j^n}{n!} \quad [3.7]$$

esprime la probabilità associata ad un numero nv_j di perdite, ognuna di ammontare L , provenienti dalla banda j .

Dalla [3.7] possiamo risalire alla f.g.p. che l'ha generata, cioè alla f.g.p. della variabile casuale "numero di perdite di importo L provenienti dalla j -esima banda":

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(nv_j) z^{nv_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mathbf{m}_j} \mathbf{m}_j^n}{n!} z^{nv_j} = e^{-\mathbf{m}_j + \mathbf{m}_j z^{v_j}} \quad [3.8]$$

(nell'ultimo passaggio, abbiamo ripercorso in senso inverso lo sviluppo di McLaurin utilizzato nella [3.4]).

La [3.8] esprime le perdite attese dalla banda j come multiplo di L , cioè su scala omogenea per qualunque j . Di conseguenza, se continuiamo a ipotizzare che i crediti siano indipendenti (e questo vale all'interno delle singole bande ma anche tra bande diverse), potremo ricavare, come produttrice delle singole $G_j(z)$ la f.g.p. complessiva della variabile-somma "numero totale di perdite di ammontare L generate dall'intero portafoglio":

$$G(z) = \prod_{j=1}^m G_j(z) = e^{\sum_{j=1}^m -\mathbf{m}_j + \mathbf{m}_j z^{v_j}} = e^{-\mathbf{m} + \sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j z^{v_j}} \quad [3.9]$$

³⁴ Nell'esempio della tavola 3.4, avendo supposto tassi di *recovery* nulli, possiamo scrivere (in analogia a quanto fatto nel paragrafo precedente) $\mathbf{m}_j \equiv \sum_{i|v_i=j} p_i \cdot L$. L'uguaglianza ha valore approssimato per effetto del passaggio dagli importi

reali (L_i) a quelli arrotondati (v_iL).

Poiché la [3.9] è una f.g.p., il termine di grado n del suo sviluppo di McLaurin³⁵ esprimerà la probabilità di perdere nL euro sull'intero portafoglio. Tutta la distribuzione delle perdite future (“discretizzata” attraverso il passaggio ai multipli interi di L) è dunque ora perfettamente nota.

Per esempio, il termine di grado 6 esprimerà la probabilità di perdere $6L$ euro, non importa se attraverso il default di due crediti di banda tre, di tre crediti di banda due, o in altri modi ancora.

Riprendendo i dati della tavola 3.4, possiamo ora calcolare la distribuzione delle probabilità delle perdite sul portafoglio di 13 crediti. A tal fine, prepariamo nella tavola 3.5 alcuni dati di riepilogo sulle tre bande:

Tavola 3.5
Alcuni dati di sintesi per bande

<i>Esposizione</i>	<i>N defaults</i>	<i>Perdita</i>
v_j	attesi μ	attesa σ
1	0.060	0.06
2	0.052	0.10
3	0.082	0.25
Totale	$\mu=0.1934$	0.41

(osserviamo che per effetto dell’arrotondamento legato alla suddivisione in “bande” su una scala discreta, il numero totale di default attesi è leggermente diverso da quello indicato, per il medesimo portafoglio, nella tavola 3.3).

La distribuzione di probabilità generata con la [3.9] (attraverso l’implementazione descritta nell’appendice B), è quella illustrata nella tavola 3.6 e rappresentata in figura 3.2. I valori di probabilità associati a valori di n compresi tra 11 e 29 non sono stati riportati nella tavola, in quanto prossimi a zero³⁶.

³⁵ Lo sviluppo di McLaurin della [3.9] non è difficile, ma nemmeno immediato. Lo riportiamo nell’appendice B, che riprende e sviluppa la documentazione tecnica dei CreditRisk+.

³⁶ In effetti, si tratta di valori positivi, anche se molto piccoli. Naturalmente, l’approssimazione basata sulla Poisson genera valori di probabilità positivi (anche se trascurabili) anche per casi impossibili: ad esempio, genera una probabilità pari a $5,4 \cdot 10^{-18}$ anche per $n=31$ (che equivale ad una perdita di circa 310.000 € cioè superiore al totale della tavola 3.4).

Tavola 3.6
**Distribuzione di probabilità
delle perdite**

<i>n</i>	<i>Perdita (nL)</i>	<i>Probabilità</i>
0	-	82.41%
1	10,000	4.90%
2	20,000	4.44%
3	30,000	7.01%
4	40,000	0.52%
5	50,000	0.37%
6	60,000	0.30%
7	70,000	0.03%
8	80,000	0.02%
9	90,000	0.01%
10	100,000	0.00%
...
30	300,000	0.00%

Come in precedenza, il caso più probabile è quello in cui nessun debitore risulta insolvente a fine periodo, e la perdita su crediti risulta nulla. Meno probabili, ma non trascurabili, sono gli scenari in cui il portafoglio crediti genera perdite comprese tra i 10.000 e i 30.000 euro. La perdita media, pesata per le probabilità, è pari a circa $0,41L$, cioè a circa 40.920 € si tratta, ovviamente, della stessa perdita attesa riportata nelle tavole 3.4 e 3.5.

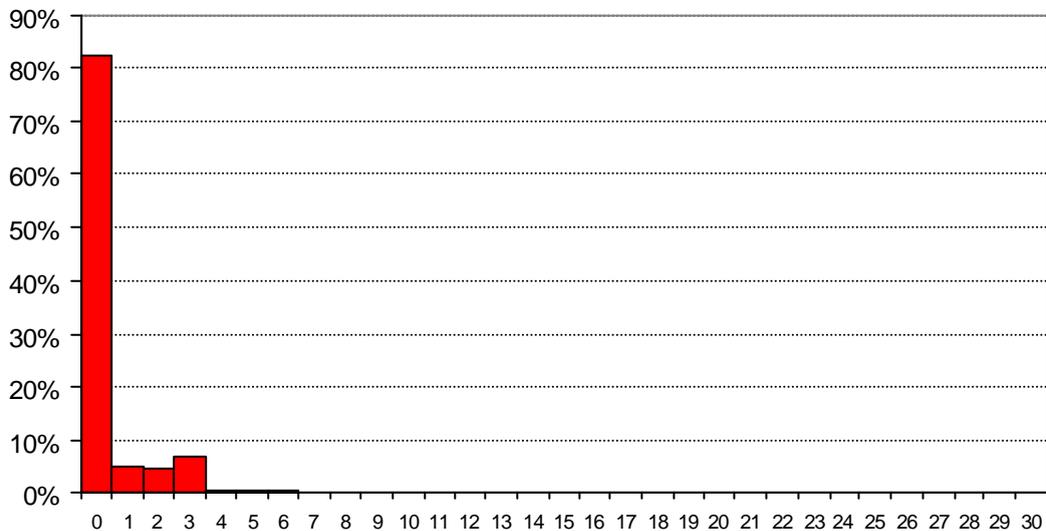


Figura 3.2: probabilità associate alle perdite su un portafoglio di 13 crediti

3.3 Cosa cambia se i tassi di default sono stocastici.

I risultati fin qui riportati si basano su due ipotesi di lavoro estremamente impegnative:

1. Si conosce, con certezza, la probabilità di default di ogni debitore;
2. Si assume che i crediti presenti in portafoglio siano incorrelati, ovvero, che il default di un prenditore sia indipendente da quello di tutti gli altri.

Nella realtà, però, accade che il tasso di insolvenza dei debitori non sia costante. Prova ne è che il tasso di default medio del portafoglio può essere, di anno in anno, superiore (o inferiore) al suo valore atteso di lungo periodo (e questo fatto accresce la probabilità di assistere a perdite estreme).

In effetti, il tasso di default dei singoli debitori non è deterministico, ma può essere rappresentato come una variabile stocastica influenzata da uno o più “fattori ambientali” (background factors), indipendenti tra loro.

In prima approssimazione possiamo pensare che *diversi fattori ambientali influenzino in modo esclusivo i diversi settori* in cui è possibile suddividere il portafoglio crediti di una banca: ad esempio, lo stato di salute dell’economia italiana è un fattore ambientale che influenza soltanto il tasso di default dei debitori italiani, ed è indipendente dai fattori che influenzano i restanti settori del portafoglio.

Si tratta di una visione “a compartimenti stagni” e un po’ semplicistica, che vedremo di rimuovere nel seguito. Pur se limitata, tuttavia, essa rappresenta un passo avanti rispetto alle ipotesi dei paragrafi precedenti, perché ci consente di “modellare” il fatto che i tassi di insolvenza delle imprese italiane (o tedesche, o americane...) tendono a crescere e a ridursi insieme, in risposta alle fluttuazioni della congiuntura macroeconomica.

Tavola 3.7
Caratteristiche del portafoglio “settorizzato”

#	Nome	Settore	Importo (L_i)	Banda (v_j)	Rating	Probabilità di default attesa \bar{p}_i	Errore std della probabilità di default (σ_i)	Perdita attesa (λ_i)
1	Rossi	I	11,000	1	AA	1.0%	1.0%	110
2	Bianchi	S	12,000	1	BBB	2.0%	3.0%	240
3	Verdi	I	11,000	1	AAA	0.5%	1.9%	55
4	Gialli	S	9,500	1	BBB	2.0%	3.0%	190
5	Neri	I	22,000	2	AA	1.0%	1.0%	220
6	Mori	S	21,000	2	AA	1.0%	1.0%	210
7	Grossi	I	19,500	2	AA	1.0%	1.0%	195
8	Piccoli	S	20,800	2	BBB	2.0%	3.0%	416
9	Astuti	I	33,000	3	BB	2.5%	1.9%	825
10	Codardi	S	28,500	3	BBB	2.0%	3.0%	570
11	Stupazzoni	I	31,000	3	AAA	0.5%	1.9%	155
12	Molinari	S	30,800	3	BBB	2.0%	3.0%	616
13	Vasari	I	29,000	3	AA	1.0%	1.0%	290
<i>Totale Servizi</i>						11.0%	16.0%	
<i>Totale Industria</i>						7.5%	9.6%	

La tavola 3.7 ci mostra alcune modifiche che è necessario introdurre nel nostro portafoglio per poter dare conto dei diversi settori in esso presenti. Le righe verticali tratteggiate dividono la tabella in quattro sezioni, che commentiamo separatamente:

1. La prima sezione contiene, come sempre, numero progressivo e nominativo dei debitori.
2. La seconda mostra la suddivisione dei 13 crediti in due settori (*I* come industria e *S* come servizi³⁷), che, per ora, verranno considerati mutualmente indipendenti. Questa suddivisione

³⁷ Si tratta, ovviamente, solo di un esempio didattico; nella realtà, due indici congiunturali relativi a industria e servizi non sarebbero certo indipendenti, e non rappresenterebbero quindi dei buoni *background factors* per Creditrisk+.

(evidenziata anche con il diverso colore dello sfondo) non sostituisce quella per fasce d'importo operata in precedenza, ma si sovrappone ad essa, così che ora ogni k -esimo settore si articola in $m(k)$ bande. Per ogni banda del k -esimo settore, continueremo a calcolare le grandezze già incontrate nel paragrafo precedente, ad esempio l'importo $v_j^{(k)}$ o la perdita attesa $\epsilon_j^{(k)}$.

- La terza sezione illustra un profondo cambiamento di significato nei tassi di default dei singoli debitori, non più deterministici, bensì stocastici. Se prima la probabilità di insolvenza del signor Rossi era data e costante, ora è diventata una variabile casuale di cui, in tabella, riportiamo la media e l'errore standard. Poiché non è possibile costruire, per ogni singolo nominativo in portafoglio, una stima di questi due parametri, conviene affidarsi ad un procedimento "all'ingrosso": ad ogni debitore gli analisti della banca assegnano un rating, e per ogni livello del rating sono disponibili stime (basate su dati passati) del tasso di default atteso e della sua volatilità (un esempio di queste stime è riportato nella tavola 3.8, che è stata presa a riferimento per l'esempio della tavola 3.7).

Tavola 3.8
Esempio di rating

	Tasso di default atteso	Errore standard
AAA	0.50%	0.3%
AA	1%	1.0%
A	1.50%	1.9%
BBB	2%	3.0%
BB	2.50%	4.4%
B	3%	6.0%
CCC	5%	15.0%

- Nell'ultima sezione si riporta, come in precedenza, la perdita attesa. Anche se in apparenza il valore non è cambiato, è il suo significato ad essere diverso. Se prima questo valore era ottenuto moltiplicando il valore del credito per la probabilità certa (p_i) di un evento incerto (il default), ora esso incorpora il valore del credito e il valore atteso (\bar{p}_i) di una probabilità incerta (la indicheremo con \tilde{p}_i , proprio perché è divenuta stocastica).

Vediamo ora di chiarire meglio la natura stocastica delle "nuove" \tilde{p}_i .

Per farlo, consideriamo il numero totale di insolvenze che si manifestano, in un anno, all'interno di un dato settore. E' evidente che tale valore non è costante, ma risente delle condizioni congiunturali. E' quindi del tutto ragionevole rappresentarlo con una variabile casuale x_k con media \mathbf{m}_k (media di lungo periodo del numero di insolvenze per anno) ed una certa varianza \mathbf{s}_k^2 :

$$E(x_k) = \mathbf{m}_k; \quad \text{Var}(x_k) = \mathbf{s}_k^2 \quad [3.10]$$

Ricordiamo ora la definizione del "numero totale di insolvenze" data nel paragrafo precedente (e valida anche all'interno dei singoli settori):

Sarebbe invece necessario (ma si tratta di un passaggio che va oltre gli obiettivi di questo lavoro) trasformare le variabili macroeconomiche in uno o più fattori ortogonali, ad esempio attraverso un'analisi delle componenti principali.

$$\mathbf{m}_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\mathbf{e}_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} = \sum_{i \in k} \frac{\mathbf{e}_i}{v_i}$$

Questa definizione, che fin qui valeva tra grandezze deterministiche, rimane ora valida solo a livello di valori attesi (visto che \mathbf{m}_k ha acquisito il significato di valore atteso di x_k):

$$\mathbf{m}_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\bar{\mathbf{e}}_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} = \sum_{i \in k} \frac{\bar{\mathbf{e}}_i}{v_i} \quad [3.11]$$

Dev'essere quindi:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{e}}_i \frac{x_k}{\mathbf{m}_k} \quad [3.12]$$

perché in questo modo accade che

$$E(\tilde{\mathbf{e}}_i) = \bar{\mathbf{e}}_i \frac{E(x_k)}{\mathbf{m}_k} = \bar{\mathbf{e}}_i \quad [3.12]$$

e la definizione di \mathbf{m}_k data nella [3.11] è verificata. In altri termini, per ogni credito, la perdita attesa (stocastica) in un certo anno ($\tilde{\mathbf{e}}_i$) è data dal prodotto tra il valore medio di lungo periodo ($\bar{\mathbf{e}}_i$) ed una variabile casuale x_k/\mathbf{m}_k con media unitaria.

E' facile vedere che qualcosa di simile vale anche per la perdita attesa su ogni euro prestato

$$\frac{\tilde{\mathbf{e}}_i}{v_i} = \frac{\bar{\mathbf{e}}_i}{v_i} \frac{x_k}{\mathbf{m}_k} \quad [3.13]$$

e anche per la probabilità di default. Infatti, dalla definizione di ε_i (cfr. anche la nota 33), segue che:

$$\tilde{p}_i = \frac{L}{L_i(1-R_i)} \tilde{\mathbf{e}}_i \cong \frac{\tilde{\mathbf{e}}_i / v_i}{1-R_i} \quad [3.14]$$

E poiché l'unico elemento stocastico³⁸ nella formula precedente è dato da $\tilde{\mathbf{e}}_i$, possiamo dire che anche \tilde{p}_i è data dal prodotto tra il suo valore medio di lungo periodo (\bar{p}_i) ed una variabile casuale con media unitaria. Dalla [3.14] segue anche che, se il tasso di recupero è ovunque prossimo a zero, allora

$$\mathbf{m}_k = \sum_{i \in k} \bar{p}_i \quad [3.15]$$

Consideriamo ora l'errore standard s_{ε}^i della variabile casuale $\tilde{\mathbf{e}}_i/v_i$ (perdita attesa su ogni euro prestato); dalla [3.13] è evidente che

³⁸ Ricordiamo che il tasso di recupero è considerato deterministico.

$$\sum_{i \in k} \mathbf{s}_e^i = \sum_{i \in k} \frac{\bar{\mathbf{e}}_i}{v_i \mathbf{m}_k} \mathbf{s}_k = \frac{\mathbf{s}_k}{\mathbf{m}_k} \sum_{i \in k} \frac{\bar{\mathbf{e}}_i}{v_i} = \mathbf{s}_k \quad [3.16]$$

Qualcosa di simile vale anche per la probabilità di default, ma solo se il tasso di recupero è ovunque prossimo a zero. Infatti, se \mathbf{s}_k è l'errore standard di \tilde{p}_i , dalla [3.14] segue che

$$\mathbf{s}_i \cong \frac{\mathbf{s}_e^i}{1 - R_i} \quad [3.17]$$

e quindi, se $R_i \cong 0$:

$$\mathbf{s}_k \cong \sum_{i \in k} \mathbf{s}_i \quad [3.18]$$

Attraverso la [3.15] e la [3.16] è possibile stimare \mathbf{m} e \mathbf{s}_k partendo dai \bar{p}_i e \mathbf{s}_i individuali³⁹. Il risultato del calcolo, per i settori dell'industria e dei servizi utilizzati nel nostro esempio, è riportato nelle ultime due righe della tavola 3.7.

3.4 Prevedere il numero di insolvenze se i default sono stocastici

Nel paragrafo precedente ci siamo costruiti (non senza qualche fatica) l'armamentario concettuale necessario per affrontare il caso di tassi di default stocastici in un portafoglio articolato per settori mutualmente indipendenti. L'utilizzo di questo armamentario, per fortuna, non è eccessivamente complicato. Incominciamo col dire che, se i due settori sono indipendenti, ognuno può essere visto come un portafoglio, con una sua f.g.p. che ricalca la [3.3]:

$$F_k(z) \cong e^{\mathbf{m}(z-1)} \quad [3.19]$$

Se il numero di default attesi nel k -esimo settore è stocastico, la sua f.g.p. *condizionale* ad un certo valore x di x_k diventa

$$F_k(z) \Big|_{x_k=x} = e^{x(z-1)}. \quad [3.20]$$

La funzione generatrice di probabilità non condizionale è data dall'integrale di tutte le possibili f.g.p. condizionali ad un certo x , ognuna pesata per il corrispondente valore della funzione di densità di probabilità $f_k(x)$:

$$F_k(z) = \int_0^{+\infty} e^{x(z-1)} f_k(x) dx \quad [3.21]$$

Per risolvere questo integrale è necessario specificare la funzione di densità di probabilità di x_k . Gli autori di CreditRisk+ utilizzano una funzione gamma⁴⁰, cioè:

³⁹ In realtà, le probabilità di default sono grandezze "poco maneggevoli" perché le formule come la [3.15] e la [3.18] prescindono dall'arrotondamento implicito nel passaggio da L_i/L a v_i , e postulano che R_i sia prossimo a zero. Conviene dunque lavorare con $\tilde{\mathbf{e}}_i/v_i$, cioè con la perdita attesa su ogni euro prestato. Si tratta, tuttavia, di un concetto meno intuitivo rispetto alla "probabilità di default", ed è per questo che, nella costruzione dell'esempio nella tavola 3.7, abbiamo privilegiato i \tilde{p}_i , anche a costo di dover ipotizzare un recovery rate nullo.

$$f_k(x) = \frac{e^{-\frac{x}{b}} x^{a-1}}{b^a \Gamma(a)}; \quad \text{con } \Gamma(a) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx \quad [3.22]$$

Tale scelta è legata principalmente a due motivi:

1. La distribuzione gamma, pur essendo interamente descritta da due parametri⁴¹ (α e β), può assumere un'ampia varietà di configurazioni; tra queste, vi è anche il caso di una lunga coda a destra, particolarmente adatto a descrivere il comportamento dei tassi di default (che in circostanze occasionali risultare anche sensibilmente superiori al valore medio di lungo periodo).

Nella figura 3.3 abbiamo tracciato tre distribuzioni gamma relative all'esempio della tavola 3.7: si tratta del tasso di default medio⁴² per: *a*) il sottoportafoglio legato all'industria; *b*) quello dei servizi, e *c*) un singolo credito (il primo, al cliente Rossi). Come si vede, quest'ultimo - pur non discostandosi molto dai due settori in termini di tasso di default atteso - è notevolmente più volatile, visto che un singolo credito non può beneficiare dell'effetto di diversificazione tipico di un portafoglio contraddistinto da più operazioni.

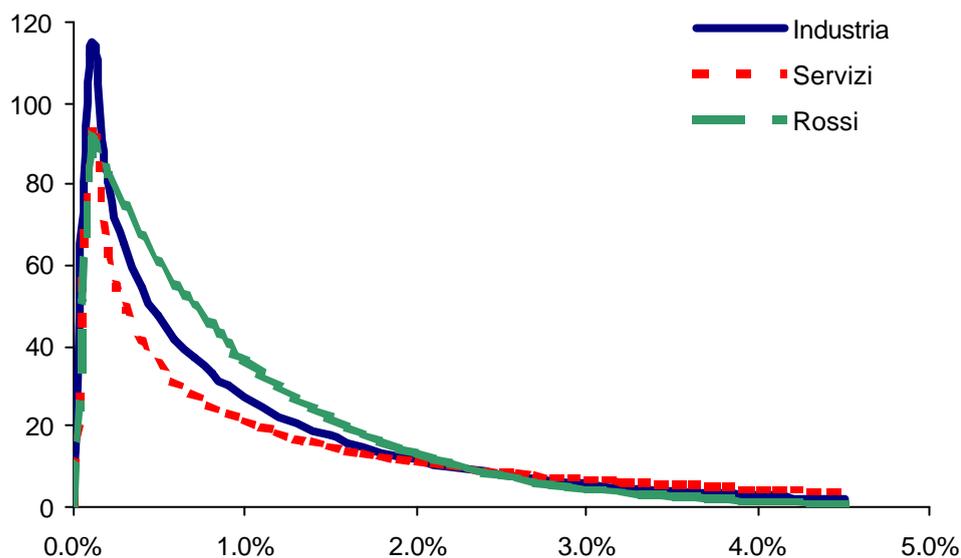


Figura 3.3: distribuzioni gamma relative all'esempio della tavola 3.8.

2. Sostituita all'interno della [3.21] conduce rapidamente alla soluzione dell'integrale. Si ottiene infatti:

⁴⁰ La [3.21] rappresenta quella che, nella matematica delle assicurazioni, è nota come distribuzione di Poisson mista; la scelta di una gamma, ed i risultati riportati nel paragrafo seguente, costituiscono un caso particolare della Poisson mista, detto "caso di Pólya", e analizzato per la prima volta da Eggenberger e Pólya negli anni '20.

⁴¹ Media e varianza della distribuzione gamma sono date, rispettivamente, da $\mu = \alpha\beta$ e da $\sigma^2 = \alpha\beta^2$. Nel nostro caso, quindi, avremo che $a = \frac{\mu}{\sigma^2}$ e $b = \frac{\sigma^2}{\mu}$.

⁴² Abbiamo preferito tracciare la distribuzione del tasso di default medio (n. di default / n. di crediti) piuttosto che del numero di default, perché in questo modo possiamo confrontare tra loro agevolmente due settori che raccolgono un diverso numero di crediti (sette per l'industria, sei per i servizi) ed un singolo cliente, per il quale tasso di default e numero di default attesi coincidono.

$$F_k(z) = \frac{1}{\mathbf{b}^a \Gamma(\mathbf{a})} \int_0^{+\infty} e^{-x(\mathbf{b}^{-1}+1-z)} x^{\mathbf{a}-1} dx$$

che, ponendo $y = \mathbf{a}x(\mathbf{b}^{-1}+1-z)$, diventa

$$\begin{aligned} F_k(z) &= \frac{1}{\mathbf{b}^a \Gamma(\mathbf{a})} \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{y^{\mathbf{a}-1}}{(\mathbf{b}^{-1}+1-z)^{\mathbf{a}-1}} \frac{dy}{\mathbf{b}^{-1}+1-z} = \\ &= \frac{1}{\mathbf{b}^a \Gamma(\mathbf{a}) (\mathbf{b}^{-1}+1-z)^{\mathbf{a}}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\mathbf{a}-1} dy = \frac{1}{\mathbf{b}^a (\mathbf{b}^{-1}+1-z)^{\mathbf{a}}} = \left(\frac{1}{1+\mathbf{b}-\mathbf{b}z} \right)^{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

o anche

$$F_k(z) = \left(\frac{1-p_k}{1-p_k z} \right)^{\mathbf{a}_k} \quad \text{con} \quad p_k \equiv \frac{\mathbf{b}_k}{1+\mathbf{b}_k} \quad [3.23]$$

dove il k a pedice di α e di p serve a ricordarci che α e β (di cui p è una funzione) sono specifici per il k -esimo settore (cfr. nota 41).

Poiché i settori sono, per ipotesi, indipendenti tra loro, è immediato ricavare la f.g.p. del portafoglio, che è data semplicemente dalla produttoria delle f.g.p. di settore:

$$F(z) = \prod_k F_k(z) = \prod_k \left(\frac{1-p_k}{1-p_k z} \right)^{\mathbf{a}_k} \quad [3.24]$$

Anche dalla [3.24] è possibile ricavare uno sviluppo in serie di McLaurin ed un'indicazione circa la probabilità di assistere a n default. Per il portafoglio della tavola 3.7, la distribuzione di probabilità è quella indicata nella figura 3.4, dove riportiamo anche, per confronto, gli istogrammi già presentati nel paragrafo 3.1 (cioè ottenuti ipotizzando che i tassi di default fossero deterministici). Come già in precedenza, l'asse verticale è stato modificato per consentire una migliore visualizzazione.

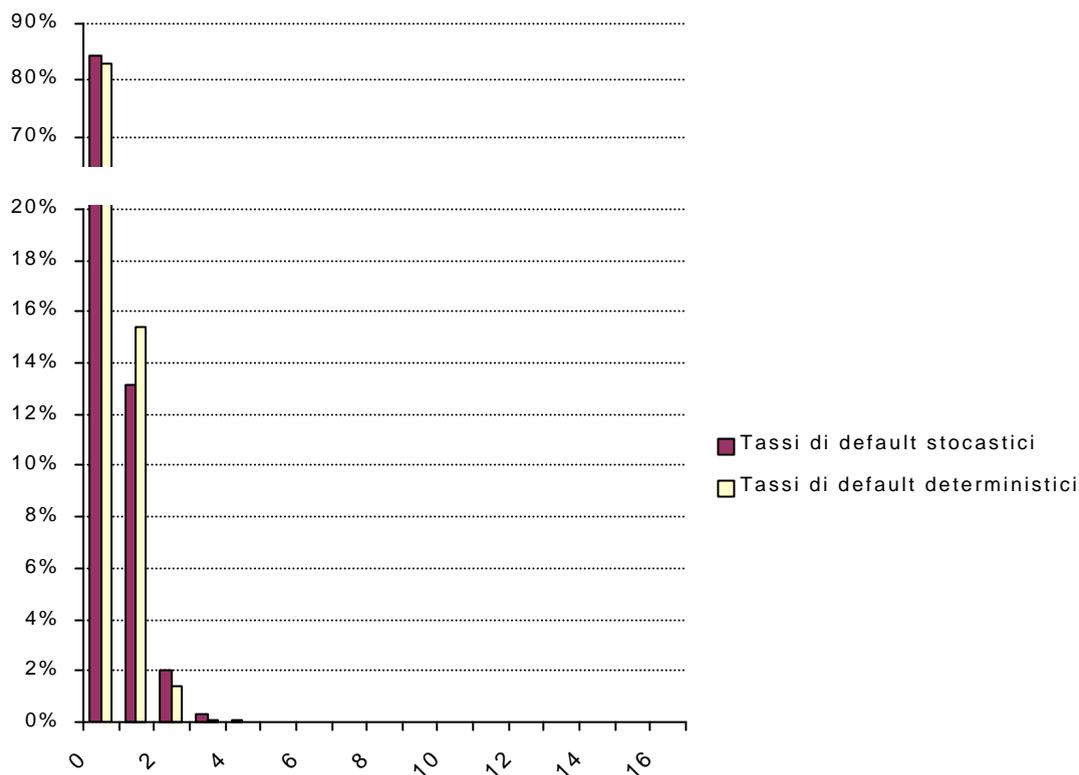


Figura 3.4: distribuzione del numero di default e confronto con il caso deterministico

La distribuzione generata in questo paragrafo (supponendo che le probabilità di insolvenza siano stocastiche) associa probabilità più elevate agli eventi estremi (nessuna insolvenza, oppure da due a quattro insolvenze); viceversa, la “vecchia” distribuzione, generata a partire da probabilità di insolvenza fissate a priori, assegna una maggiore probabilità all’evento centrale (una sola insolvenza). Il risultato è che gli indici di dispersione intorno alla media risultano più elevati per la prima distribuzione (l’errore standard, ad esempio, è pari a 46,9%, anziché 43%)⁴³.

Ciò accade perché ad una prima fonte di incertezza, già presente nel modello (“Quanti debitori falliranno, date le loro probabilità di default?”), ne abbiamo aggiunta una seconda (“...e quali saranno, in effetti, le probabilità di default quest’anno, sapendo che la loro funzione di densità è una gamma?”).

Come già fatto alla fine del paragrafo 3.1, tuttavia, osserviamo che, più che il numero di debitori insolventi, ci interessa conoscere l’ammontare delle possibili perdite. E’ questo l’oggetto del paragrafo che segue.

3.5 Prevedere le perdite se i tassi di default sono stocastici

Torniamo a rileggere la f.g.p. delle perdite derivata, nel § 3.2 (con probabilità di default deterministiche). Possiamo riscrivere la [3.9] nel modo seguente:

⁴³ Ciò è perfettamente coerente con il risultato generale (cfr. ad es. il teorema 2.4.12 in Daykin et al., 1994) che vuole la varianza di una Poisson mista uguale alla varianza della Poisson di partenza (condizionale) più un termine positivo, che è funzione crescente della varianza della Poisson non condizionale e della varianza della variabile usata per descrivere il fattore ambientale x .

$$G(z) = F(P(z)) = e^{m(P(z)-1)} \quad \text{con} \quad P(z) \equiv \frac{\sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j z^{v_j}}{\mathbf{m}} \quad [3.25]$$

In pratica, $G(z)$ può essere vista come la f.g.p. di una distribuzione di Poisson, dove al posto della variabile ausiliaria z compare una funzione $P(z)$.

Partendo da questa constatazione, osserviamo che:

1. Ogni k -esimo settore può vedersi come un portafoglio, che ha la propria $G_k(z)$. Queste $G_k(z)$ hanno la stessa forma indicata nella [3.9] e nella [3.25], anche se la notazione si complica leggermente, perché è necessario mettere un k a pedice per ricordarci che stiamo descrivendo l'ammontare di perdite generato dal k -esimo settore:

$$G_k(z) = F_k(P_k(z)) = e^{x_k(P_k(z)-1)} \quad \text{con} \quad P_k(z) \equiv \frac{\sum_{j=1}^{m^{(k)}} \frac{\mathbf{e}_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} z^{v_j^{(k)}}}{\mathbf{m}_k} \quad [3.26]$$

2. Le singole $G_k(z)$ possono essere rese stocastiche sostituendo \mathbf{m}_k con x_k e $\mathbf{e}_j^{(k)}$ con $\tilde{\mathbf{e}}_j^{(k)}$ (cfr. la [3.13]). Si ottiene:

$$G_k(z) = F_k(P_k(z)) = e^{x_k(P_k(z)-1)}$$

$$P_k(z) \equiv \frac{\sum_{j=1}^{m^{(k)}} \frac{\tilde{\mathbf{e}}_j^{(k)} x_k}{v_j^{(k)} \mathbf{m}_k} z^{v_j^{(k)}}}{x_k} = \frac{\sum_{j=1}^{m^{(k)}} \frac{\tilde{\mathbf{e}}_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} z^{v_j^{(k)}}}{\mathbf{m}_k} \quad [3.27]$$

Notiamo che la $P_k(z)$ non diventa, in realtà, stocastica, perché il fattore ambientale x_k colpisce allo stesso modo numeratore e denominatore.

3. La [3.27] esprime la f.g.p. delle perdite derivanti dal k -esimo settore, condizionali ad un certo valore x_k del fattore ambientale. Come in precedenza, ricaviamo per integrazione la f.g.p. non condizionale:

$$F_k(P_k(z)) = \int_0^{+\infty} F_k(P_k(z)) \Big|_{x_k=x} f_k(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{x[P_k(z)-1]} f_k(x) dx \quad [3.28]$$

Si tratta di un'espressione assolutamente analoga alla [3.21], visto che $P_k(z)$ è, in effetti, una costante rispetto alla variabile d'integrazione x . Se quindi continuiamo a supporre che x sia distribuita secondo una gamma, possiamo saltare direttamente alla soluzione della [3.21] (cfr. la [3.23]) e riportarla, *mutatis mutandis*, per la [3.28]:

$$G_k(z) = F_k(P_k(z)) = \left(\frac{1-p_k}{1-p_k P_k(z)} \right)^{a_k} = \left(\frac{1-p_k}{1 - \frac{p_k}{\mathbf{m}_k} \sum_{j=1}^{m^{(k)}} \frac{\tilde{\mathbf{e}}_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} z^{v_j^{(k)}}} \right)^{a_k} \quad [3.29]$$

4. Infine, poiché i settori sono, per ipotesi indipendenti, possiamo scrivere la f.g.p. globale del portafoglio semplicemente come produttrice delle f.g.p. di settore (cfr. la [3.24]):

$$G(z) = \prod_k G_k(z) \quad [3.30]$$

Dall'espressione analitica della [3.30] è ora possibile (anche se non sempre agevole) ricavare, per derivazioni successive, le probabilità $p(n)^{44}$ associate a perdite di ammontare nL . La procedura da seguire è presentata nell'appendice D.

Vediamo ora come la [3.30] possa essere utilizzata per stimare la distribuzione delle perdite sul portafoglio d'esempio illustrato nella tavola 3.7. In primo luogo, è necessario raggruppare i 13 crediti per settori e quindi, all'interno di ogni settore, per bande; ciò è stato fatto nella tavola 3.9.

Tavola 3.9

Dati di sintesi del portafoglio

<i>Settore</i>	<i>Esposizione</i> $v_j^{(k)*}$	<i>N di defaults</i> <i>attesi</i> $\mathbf{m}^{(k)}$	<i>Perdita attesa</i> $\mathbf{e}^{(k)*}$
<i>Industria</i>	1	0.017	0.0165
<i>Industria</i>	2	0.021	0.0415
<i>Industria</i>	3	0.042	0.127
<i>Servizi</i>	1	0.043	0.04
<i>Servizi</i>	2	0.031	0.06
<i>Servizi</i>	3	0.040	0.12
Totale		0.1934	0.41

* in unità di L

Partendo da questi dati, è possibile costruire (cfr. [3.15] e [3.16]) media e deviazione standard delle variabili x_i (numero di default attesi su crediti legati al settore "industria") e x_s (numero di default attesi su crediti legati al settore "servizi"); da queste seguono i parametri (α , β e p) delle rispettive distribuzioni gamma (cfr. nota 41); tali valori sono riportati nella tavola 3.10.

Tavola 3.10

Dati di sintesi dei due settori e delle loro distribuzioni gamma

	\mathbf{m}	\mathbf{s}	\mathbf{a}_k	\mathbf{b}_k	p_k
<i>Industria</i>	0.080	0.102	0.608	0.131	0.116
<i>Servizi</i>	0.114	0.166	0.473	0.241	0.194

A questo punto, disponiamo di tutti gli elementi per il calcolo della [3.30] e dei coefficienti della sua espansione in serie di McLaurin (che rappresentano le probabilità associate ai diversi livelli di perdita). Il risultato è mostrato nella tavola 3.11 e nella figura 3.5.

⁴⁴ A questo punto il lettore si sarà accorto che tra $p(n)$, p_k e $P_k(z)$ non intercorre alcun rapporto di parentela. La somiglianza è casuale e dovuta al desiderio di seguire, per quanto possibile, la simbologia utilizzata dagli autori di CreditRisk+ (che, pur avendo a disposizione le 26 lettere dell'alfabeto inglese, avevano evidentemente un debole per le "p"....).

Tavola 3.11:

Distribuzione delle perdite		
<i>n</i>	<i>nL</i>	<i>Probabilità</i>
0	0	83.8%
1	10000	4.1%
2	20000	3.9%
3	30000	6.2%
4	40000	0.7%
5	50000	0.6%
6	60000	0.5%
7	70000	0.1%
8	80000	0.1%
9	90000	0.0%
10	100000	0.0%
11	110000	0.0%
12	120000	0.0%
13	130000	0.0%
14	140000	0.0%
15	150000	0.0%
16	160000	0.0%
17	170000	0.0%

In particolare, la figura riporta, per confronto, anche la distribuzione condizionale delle perdite generata nel paragrafo 3.2 (tassi di default deterministici - in pratica $S_k=0$ per qualunque settore). Come si vede, ora che i tassi di default sono divenuti stocastici, le probabilità associate agli eventi estremi sono aumentate. Ad esempio, il 99° percentile della distribuzione, che in precedenza valeva 40.000 euro, ora è cresciuto a 50.000 euro, con evidenti implicazioni in termini di capitale a rischio. Questo accade perché i default dei singoli prenditori non sono più indipendenti, ma dipendono in parte da fattori comuni; in pratica, l'effetto virtuoso della diversificazione funziona di meno, visto che tutti i prestiti orientati verso il medesimo settore (industria o servizi, nell'esempio) risentono del medesimo ciclo macroeconomico.

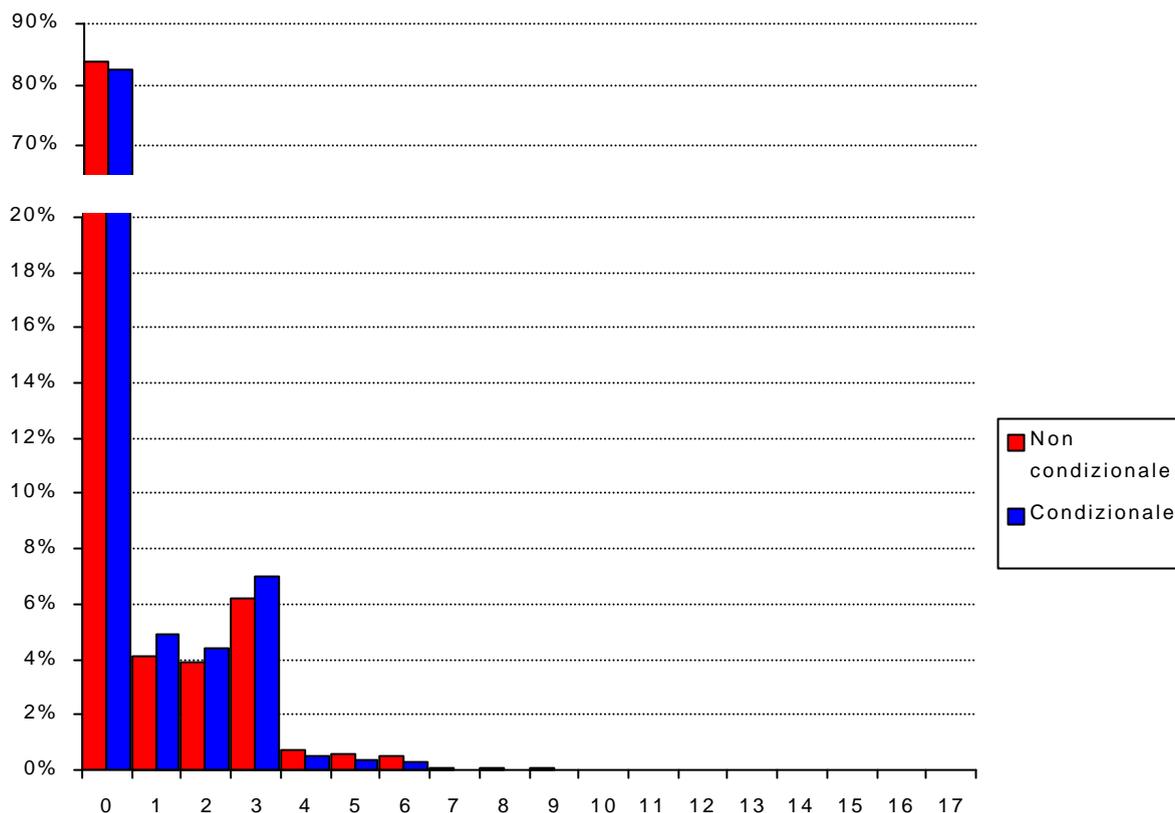


Figura 3.5: distribuzione delle perdite e confronto con il caso deterministico

3.6 Dai settori ai fattori

Nei §§ 3.4 e 3.5 abbiamo supposto che il portafoglio fosse diviso in settori, ognuno guidato da un fattore ambientale indipendente dagli altri. In generale, tuttavia, il tasso di default di un debitore dipende da più fattori (ad esempio, dal cambio, dal livello dei tassi di interesse, ecc.). E' dunque tempo di riprendere la nostra marcia di avvicinamento alla realtà..

Immagineremo ora che non sia più possibile dividere in settori (sottogruppi) il portafoglio, ma che tutti i crediti dipendano da un numero finito di fattori ambientali. Tuttavia, continueremo a supporre che tali fattori siano indipendenti tra loro⁴⁵.

Vediamo ora in che modo, secondo gli autori del modello, un simile stato di cose possa essere incorporato in CreditRisk+.

Per ogni i -esimo credito, diventa necessario stimare un *vettore* \mathbf{q} delle dipendenze settoriali con componenti non negative e tali che $\sum \mathbf{q}_k = 1$. La generica componente \mathbf{q}_k esprime il grado di dipendenza del credito dal k -esimo fattore. Per esempio, il default del debitore Rossi potrebbe dipendere al 90% dal settore dell'industria ($k=1$) e al 10% da quello dei servizi ($k=2$): in tal caso, si avrebbe $\mathbf{q}_1=0,9$, $\mathbf{q}_2=0,1$ e $\sum \mathbf{q}_k = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 1$.

⁴⁵ E' evidente che si tratta di un'ipotesi non banale, visto che le variabili macroeconomiche che verosimilmente "guidano" il livello medio del tasso di default (abbiamo citato, ad esempio, tassi e cambi) non sono vicendevolmente incorrelate. Si è già detto della necessità di trasformare le variabili macroeconomiche in fattori ortogonali; più in generale, il "fine tuning" delle funzioni che legano variabili macro e probabilità di default costituisce un passaggio molto delicato nell'effettiva implementazione di Creditrisk+. In argomento, cfr. (Cocco e XXX).

Formalmente, si avrà che la perdita attesa per euro prestato all' i -esimo prenditore non sarà più data dalla [3.13], ma da una scrittura leggermente più complessa, e cioè:

$$\frac{\tilde{e}_i}{v_i} = \frac{\bar{e}_i}{v_i} \sum_{k=1}^m \mathbf{q}_{ik} \frac{x_k}{\mathbf{m}} \quad [3.31]$$

(osserviamo che il secondo fattore nella [3.31] ha sempre, per costruzione, media unitaria, così che il valore atteso della perdita per euro prestato coincide ancora con il suo valore di lungo periodo).

A questo punto, la perdita attesa e_i legata al i -esimo credito può essere sezionata in tanti pezzettini, $e_i \mathbf{q}_k$, ognuno dei quali viene considerato indipendente, e cioè come un piccolo credito a se stante, che entra a far parte della f.g.p. delle perdite ($G_k(z)$) del k -esimo fattore.

In pratica, questo equivale a riscrivere la funzione ausiliaria $P_k(z)$ utilizzata nella 3.29 come

$$P_k(z) \equiv \frac{\sum_i \frac{J_{ik} \bar{e}_i}{v_i} z^{v_i}}{\mathbf{m}} \quad [3.32]$$

Di conseguenza, ora, nelle singole $P_k(z)$ settoriali non ricadrà più soltanto un sottoinsieme dei crediti appartenenti al portafoglio (infatti non è più ammessa una suddivisione in sottogruppi, o settori, mutualmente indipendenti, come accadeva nei paragrafi precedenti); vi ricadranno, invece, tutti i clienti del portafoglio (infatti la sommatoria è per qualsiasi i), ma soltanto per quel pezzettino di perdita attesa $e_i \mathbf{q}_k$ che può essere ascritto al k -esimo fattore⁴⁶. Ovviamente, se si ritiene che il default di un debitore i non dipenda da un certo fattore k , sarà sempre possibile specificare $\mathbf{q}_k=0$.

In questa nuova cornice, i valori di \mathbf{m} e \mathbf{s}_k (necessari per costruire i parametri \mathbf{a}_k e \mathbf{b}_k della funzione gamma utilizzata per modellare x_k) diventano

$$\mathbf{m} \equiv \sum_i \frac{J_{ik} \bar{e}_i}{v_i} \quad \text{e} \quad \mathbf{s}_k = \sum_i J_{ik} \mathbf{s}_e^i \quad [3.33]$$

ed è possibile ricavare la f.g.p. delle perdite totali (dunque le probabilità associate ai diversi livelli nL di perdite) attraverso la [3.30] e le derivate presentate nell'appendice D.

Questo è l'approccio suggerito dagli autori di CreditRisk+. E' evidente, tuttavia, che trattare un unico credito dipendente da più fattori come un insieme di tanti piccoli crediti (i "pezzettini" di cui si è detto sopra) ognuno dipendente da un solo fattore rappresenta solo un'approssimazione della realtà. Così facendo, infatti, non si tiene conto del fatto che le perdite $e_i \mathbf{q}_k$ legate all'insolvenza dell' i -esimo prenditore si manifestano necessariamente tutte insieme (quel prenditore fallisce o non fallisce, ma se fallisce tutti i "pezzettini" di credito vanno in default nel medesimo istante). Una simile approssimazione potrebbe, tuttavia, risultare accettabile per portafogli sufficientemente numerosi; ritorneremo sull'argomento nel corso del paragrafo 4, dove i risultati ottenuti con la [3.30] verranno confrontati con quelli generati tramite una simulazione Montecarlo.

⁴⁶ Gli autori del modello osservano che questa impostazione non richiede necessariamente che un credito dipenda al 100% da fattori sistematici; esso può invece avere anche una componente idiosincratca (cioè individuale), più o meno consistente. In tal caso, sarà sufficiente che uno dei suoi $\mathbf{q}_{i,k}$ (ad esempio, senza perdita di generalità, il primo) faccia riferimento ad un "falso" fattore macroeconomico con $\mathbf{m} = \sum_i \mathbf{q}_{i,1} \mathbf{e}_i / v_i$ e $\mathbf{s}_1 / \mathbf{m} \neq 0$. La deviazione standard di questo pseudo-fattore può infatti essere pensata come prossima a zero visto che, per un numero di crediti in portafoglio sufficientemente elevato, il rischio idiosincratco tende ad annullarsi.

4. Applicazione di Creditrisk+ a diverse tipologie di portafogli

4.1 Struttura degli esperimenti

L'obiettivo di quest'ultimo paragrafo è quello di mettere al lavoro Creditrisk+ su alcuni portafogli più realistici del semplice esempio didattico presentato nelle pagine precedenti. Con l'occasione, si cercherà anche di vagliare la "tenuta" del modello in diverse situazioni, confrontando i risultati ricavati con la [3.30] (e il suo sviluppo presentato nell'appendice D) e quelli ottenuti con una simulazione Montecarlo⁴⁷.

La figura 4.1 presenta il nostro "portafoglio di base" o portafoglio benchmark, da cui ci discosteremo per introdurre alcune possibili sofisticazioni. Si tratta di un insieme di 250 crediti, per un'esposizione totale di 28,2 milioni di euro, appartenenti alle sette classi di rating presentate nella tavola 3.8. Per ognuno, l'asse orizzontale riporta l'esposizione a rischio (l'unità di misura è pari, come in precedenza a €10.000), già al netto del recovery rate (che, per ipotesi, è fisso, e pari al 30%), e quello verticale mostra la probabilità media di default. Come si vede, il portafoglio copre un ventaglio di controparti abbastanza differenziato, tanto sotto il profilo delle quantità, che sotto quello della qualità dei crediti; esso risulta dunque sufficientemente generale e rappresentativo.

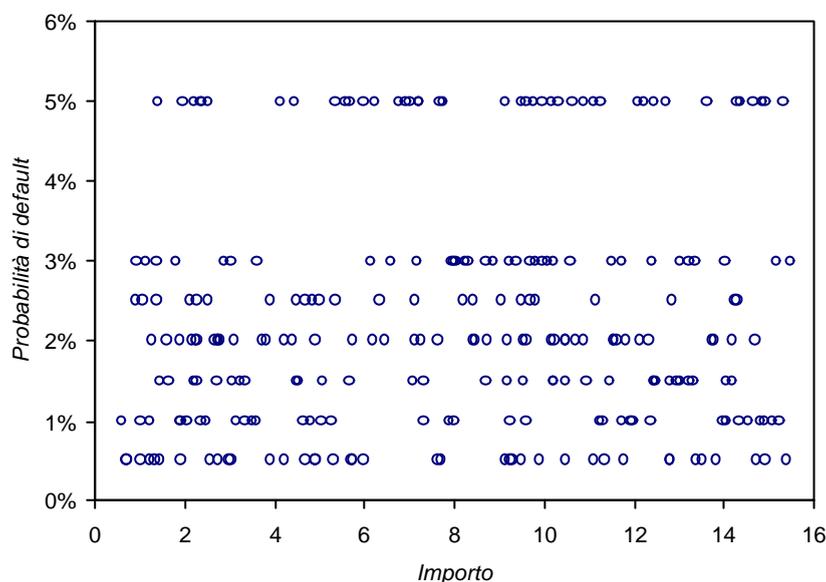


Figura 4.1: caratteristiche del portafoglio benchmark

Nello scenario di base supporremo che la probabilità di default tutti i prestiti dipenda da un unico fattore⁴⁸ (che può rappresentare, in termini molto generali, "l'andamento dell'economia"); un secondo fattore ed una componente di rischio idiosincratico verranno introdotti negli scenari alternativi. Più precisamente (cfr. figura 4.2), ci allontaneremo dal portafoglio di riferimento in tre diverse direzioni:

⁴⁷ Tutti i risultati presentati in questo paragrafo sono stati generati con programmi scritti dall'autore in ambiente Xlisp-Stat.

⁴⁸ Ciò significa che *le probabilità di default* dei 250 cinquanta debitori sono perfettamente correlate, ma naturalmente non implica che *loro default* mostrino una correlazione del 100%. In effetti, in questo caso, la correlazione tra le insolvenze dei diversi debitori, stimata in base all'approssimazione proposta da Credit Suisse Financial Products (1997), varia dallo 0,1% per due debitori di rating massimo, al 1,2% per due debitori di rating minimo.

- 1) aggiungendo, a fianco del fattore macroeconomico, un elemento di rischio idiosincratco che, nei diversi scenari di prova, concorrerà a determinare la probabilità di default dei debitori per il 25%, il 50% o il 75%;
- 2) aggiungendo, a fianco del primo fattore, un secondo fattore macroeconomico che, nei diversi scenari di prova, concorrerà a determinare la probabilità di default dei debitori per il 25% o il 50% ;
- 3) rimuovendo alcune semplificazioni tipiche di CreditRisk+: in primo luogo, evitando gli arrotondamenti dovuti al banding, in secondo luogo ammettendo che il recovery rate sia stocastico e possa oscillare di un 20% in più o in meno rispetto al valore atteso.

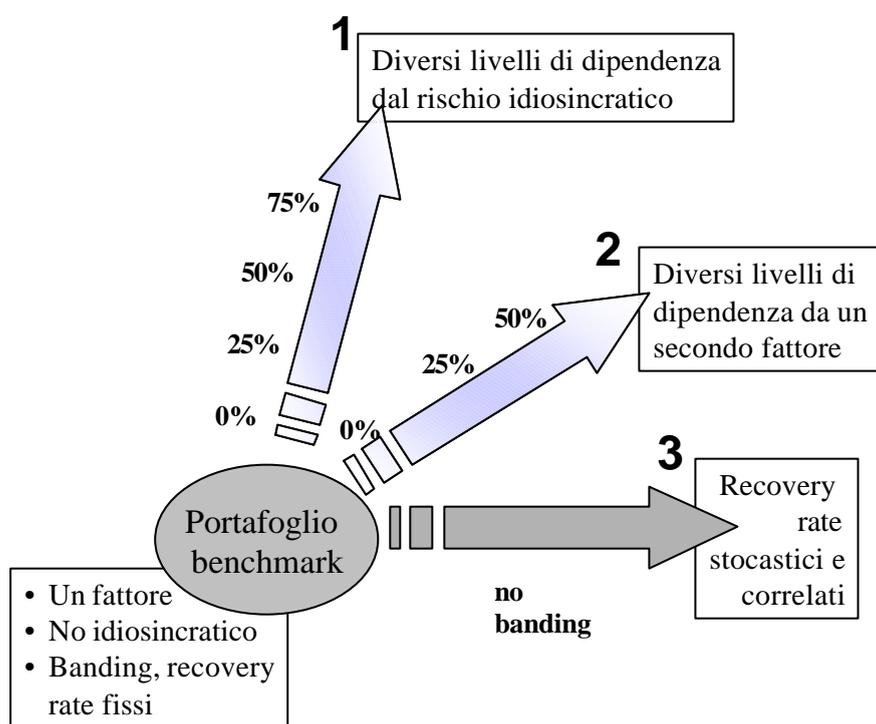


Figura 4.2: piano degli esperimenti

Gli scenari alternativi presentati sub 1) e 2) verranno implementati sia attraverso le formule di Creditrisk+ che tramite una simulazione Montecarlo: in questo modo, sarà possibile verificare in l'accuratezza dei risultati ottenuti dal modello. L'opzione 3), viceversa, presenta caratteristiche che Creditrisk+ non è in grado di trattare (recovery rate stocastici e correlati): di conseguenza, la distribuzione delle perdite verrà generata esclusivamente attraverso simulazioni Montecarlo e confrontata direttamente con quella del portafoglio di base.

Prima di procedere all'esame dei risultati, dedichiamo un cenno ai meccanismi di funzionamento delle simulazioni Montecarlo con cui verrà messa a confronto la distribuzione delle perdite generata da Creditrisk+ (cfr. la figura 4.3 e le spiegazioni ivi riportate).

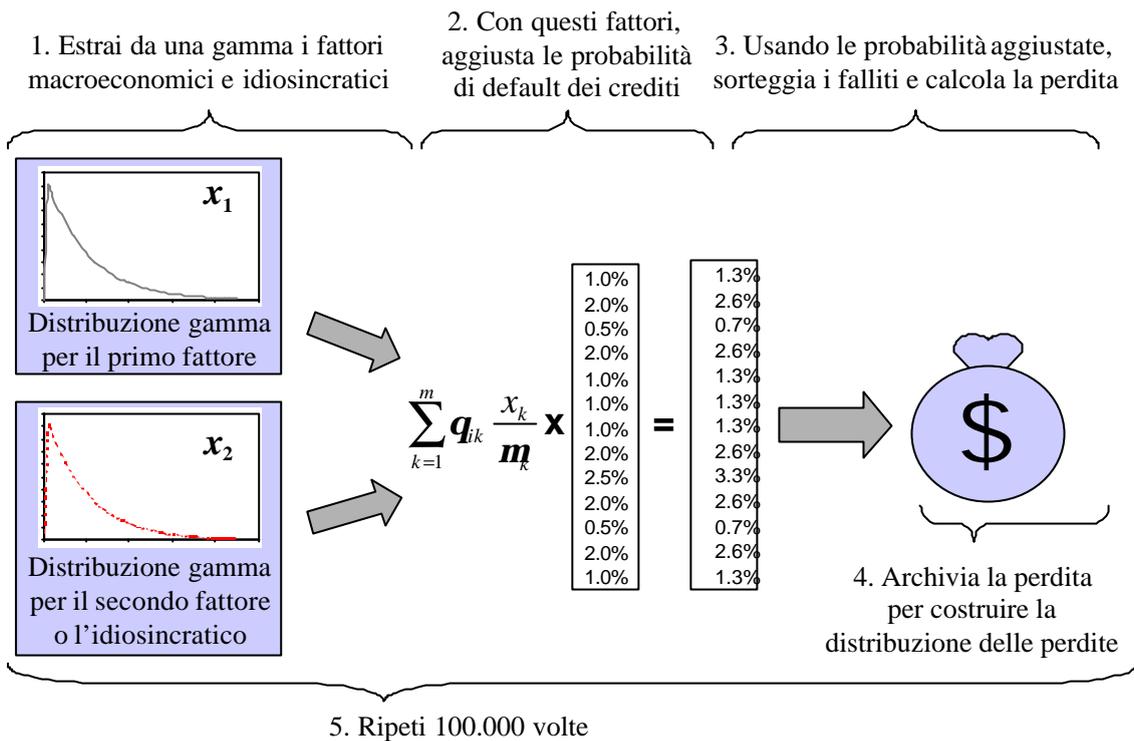


Figura 4.3: meccanismo di funzionamento delle simulazioni Montecarlo

Nelle simulazioni, non disponendo di dati empirici sufficientemente estesi sulle determinanti dei tassi di default annuali, adotteremo alcune ipotesi di fondo del modello: in particolare utilizzeremo una o più distribuzioni gamma per generare i valori dei fattori macroeconomici (e dell'eventuale fattore idiosincratico) che influenzano le probabilità di default individuali.

Una volta generati i valori delle probabilità di insolvenza per tutti i 250 crediti in portafoglio, tuttavia, non utilizzeremo la [3.9] per stimare la distribuzione condizionale delle perdite, ma procederemo ancora attraverso estrazioni casuali. In particolare, le probabilità di insolvenza condizionali dei 250 crediti saranno confrontate con altrettanti valori provenienti da variabile uniforme compresa tra zero e uno: se il valore casuale sarà inferiore alla probabilità di default di un debitore, lo considereremo fallito e iscrivere tra le perdite l'importo del suo credito.

In questo modo, non dovremo approssimare con una Poisson la distribuzione del numero di clienti insolventi e delle perdite, che verrà invece ricavata per iterazione; analogamente, non faremo ricorso al meccanismo presentato nel paragrafo 3.4 per dare conto della dipendenza da più fattori delle probabilità di default (lo "spezzettamento" di ogni credito in più porzioni, ognuna dipendente da un solo fattore).

4.2 Risultati

Consideriamo la prima della tre direttrici indicate in figura 4.2 e vediamo cosa accade al portafoglio base quando accanto al fattore macroeconomico che "guida" le probabilità default, fa la sua comparsa una componente idiosincratica (che, nei diversi scenari, spiega rispettivamente il 25%, il 50% e il 75% della volatilità totale). La figura 4.4 e la tavola 4.1 mostrano i principali effetti sulla distribuzione delle perdite (stimata attraverso il modello CreditRisk+) e su alcuni parametri sintetici del portafoglio.

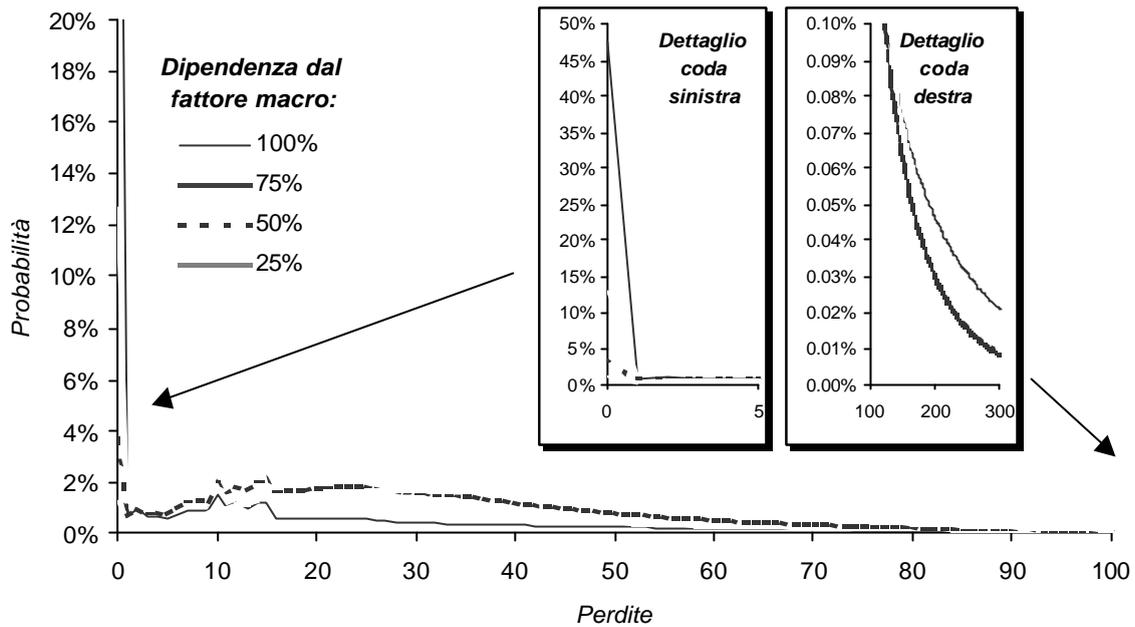


Figura 4.4: *incidenza del rischio idiosincronico sulla distribuzione delle perdite*

Come si nota dal grafico, al crescere della componente idiosincronica il portafoglio si fa sensibilmente meno rischioso, perché maggiore è l'effetto di diversificazione conseguito⁴⁹. Infatti, passando dalle curve più scure (fattore macro al 100% e al 75%) a quelle più chiare (50% e 25%), aumentano le probabilità associate ai valori centrali della distribuzione, mentre i casi estremi (perdite nulle o molto elevate - cfr. i due riquadri) diventano meno verosimili.

Il medesimo risultato emerge dalla tavola 4.1: nei diversi scenari la perdita attesa non cambia (risultato corretto, visto che essi differiscono solo per una diversa struttura della volatilità attorno al valor medio), mentre il rischio diminuisce sensibilmente man mano che si riduce il tasso di dipendenza dal fattore macro. Se ne ha riscontro dai valori dell'errore standard e dei percentili.

⁴⁹ Nella nota 46 si è detto che, nel caso del fattore idiosincronico, l'errore standard di x_I tende a zero più velocemente della media al crescere del numero di crediti, così che \mathbf{s}_I/\mathbf{m} è prossimo a zero per un numero di controparti sufficientemente elevato. In effetti, per i portafogli presentati in questo paragrafo (costituiti da 250 crediti, un numero elevato ma non altissimo) si è preferito calcolare l'esatto valore di $\mathbf{s}_I/\mathbf{m}_I = \sqrt{\sum_i \mathbf{s}_i^2} / \sum_i \mathbf{e}_i/v_i$.

Tavola 4.1
**Scenari alternativi con un fattore idiosincratico:
 perdite generate con le formule di CreditRisk+**

		<i>Dipendenza dal fattore macro</i>			
		<i>100%</i>	<i>75%</i>	<i>50%</i>	<i>25%</i>
<i>Dipendenza dal fattore idiosincratico</i>		<i>0%</i>	<i>25%</i>	<i>50%</i>	<i>75%</i>
<i>Perdita attesa</i>		45.79	45.79	45.79	45.79
<i>Errore standard</i>		98.27	75.16	52.82	33.01
<i>Percentili</i>	95	232	188	144	104
	99	480	375	270	168
	99,5	596	462	329	198
	99,9	876	674	473	273

Tutti gli importi sono multipli di 10.000€

I valori della tavola 4.1 contengono un'indicazione circa l'ammontare di capitale assorbito dal portafoglio a diversi livelli di confidenza: ad esempio, se la massima perdita possibile nel 99,5% dei casi per il portafoglio di base è pari a 5,96 milioni di euro, di cui 457.900€ già coperti con riserve (perché associati alla perdita attesa), è evidente che il patrimonio necessario per coprire "ragionevolmente" le possibili perdite (escluso un 5% di casi particolarmente sfavorevoli) è pari a circa 5,5 milioni di euro.

Se si desidera una maggiore protezione (elevando al 99,9% il livello di confidenza) sarà necessario incrementare questo valore a circa 8,3 milioni di euro; se invece il portafoglio si fa meno rischioso (perché le controparti che lo compongono dipendono in modo meno meccanico dal ciclo macroeconomico), il capitale a rischio al 99,5% di confidenza si riduce sensibilmente: nell'ultimo scenario, in cui la componente idiosincratica è nettamente predominante nel plasmare la volatilità dei tassi di default, esso scende a 1,52 milioni di euro (visto che dal livello percentile, pari a 1,98 milioni di euro, è sempre necessario stornare le perdite attese, già coperte con riserve).

Tavola 4.2
**Scenari alternativi con un fattore idiosincratico:
 perdite generate con una simulazione Montecarlo**

		<i>Dipendenza dal fattore macro</i>			
		<i>100%</i>	<i>75%</i>	<i>50%</i>	<i>25%</i>
<i>Dipendenza dal fattore idiosincratico</i>		<i>0%</i>	<i>25%</i>	<i>50%</i>	<i>75%</i>
<i>Perdita attesa</i>		45.21	45.53	45.98	45.84
<i>Errore standard</i>		96.25	73.78	52.53	32.65
<i>Percentuale di casi risultati superiori ai percentili indicati nella tavola 4.1</i>	95	4.89%	4.98%	5.07%	5.07%
	99	1.01%	0.94%	0.98%	0.98%
	99,5	0.45%	0.47%	0.50%	0.47%
	99,9	0.09%	0.09%	0.09%	0.08%

Tutti gli importi sono multipli di 10.000€

Nella tavola 4.2 i valori di perdita attesa ed errore standard sono stati ricalcolati, per i quattro scenari ora visti, facendo ricorso alla simulazione Montecarlo schematizzata in figura 4.3. Come si vede, a parte una leggera erraticità dei risultati che è caratteristica delle simulazioni Montecarlo⁵⁰, i valori stimati con il modello CreditRisk+ sono sostanzialmente confermati.

⁵⁰ L'elaboratore utilizzato per le simulazioni non era in grado di superare le 100.000 iterazioni; l'erraticità delle medie e delle deviazioni standard associata a questo numero di scenari ci è parsa comunque accettabile.

Nella seconda parte della tavola abbiamo cercato di verificare la bontà dei valori di capitale a rischio generati con CreditRisk+, annotando quale percentuale delle 100.000 iterazioni eseguite con il metodo Montecarlo comportasse valori di perdita effettivamente superiori ai percentili indicati nella tavola 4.1.. Il risultato è particolarmente confortante: anche quando il tasso di default dipende da più fattori l'approssimazione basata sulla Poisson proposta dagli autori di CR+ fornisce risultati adeguati⁵¹.

* * *

Veniamo ora al secondo filone di esperimenti del nostro breve esercizio numerico: ora non introdurremo più un termine idiosincratco, bensì un secondo fattore macroeconomico, che potrà spiegare il 25% o il 50% della volatilità dei tassi di default.

Tavola 4.3
**Scenari alternativi con un secondo fattore macro:
 perdite generate con le formule di CreditRisk+**

		<i>Dipendenza dal primo fattore macro</i>		
		<i>100%</i>	<i>75%</i>	<i>50%</i>
<i>Dipendenza dal secondo fattore macro</i>		<i>0%</i>	<i>25%</i>	<i>50%</i>
<i>Perdita attesa</i>		45.79	45.79	45.79
<i>Errore standard</i>		98.27	78.86	71.20
<i>Percentili</i>	<i>95</i>	232	196	189
	<i>99</i>	480	379	333
	<i>99.5</i>	596	466	398
	<i>99.9</i>	876	678	552

Tutti gli importi sono multipli di 10.000€

Anche in questo caso, come si nota dalla tavola 4.3, la presenza di un secondo fattore ha l'effetto di rendere meno volatile la distribuzione dei tassi di default, dunque di ridurre la varianza della stessa distribuzione delle perdite. La diversificazione, tuttavia, è minore che in precedenza in quanto il secondo fattore macro è incorrelato dal primo ma, diversamente dalla componente idiosincratca, colpisce in modo simile la probabilità di insolvenza di tutti i 250 prestiti presenti in portafoglio.

⁵¹ E' il caso di ribadire che le simulazioni Montecarlo si basano, in parte, sulle stesse ipotesi strutturali di CreditRisk+ (non essendo disponibili dati storici sufficientemente estesi per costruire un modello alternativo delle probabilità di default condizionali); di conseguenza, anche nelle simulazioni si ipotizza che i fattori macro e il termine idiosincratco siano distribuiti secondo una gamma e siano incorrelati tra loro. E' evidente che, laddove questa ipotesi strutturale non fosse accettabile, o la stima dei parametri fosse svolta in modo insoddisfacente, i risultati generati da CreditRisk+ potrebbero discostarsi dalla realtà, anche in misura significativa.

Tavola 4.4
**Scenari alternativi con un secondo fattore macro:
 perdite generate con una simulazione Montecarlo**

<i>Dipendenza dal secondo fattore macro</i>	<i>Dipendenza dal primo fattore macro</i>		
	<i>100%</i>	<i>75%</i>	<i>50%</i>
<i>Perdita attesa</i>	45.21	45.91	45.70
<i>Errore standard</i>	96.25	78.96	71.20
<i>Percentuale di casi 95 risultati superiori ai 99 percentili indicati</i>	4.89%	5.02%	4.97%
<i>99.5</i>	1.01%	1.06%	1.07%
<i>nella tavola 4.3</i>	0.45%	0.50%	0.52%
<i>99.9</i>	0.09%	0.10%	0.10%

Tutti gli importi sono multipli di 10.000€

Come in precedenza, la tavola 4.4 riscontra, per mezzo di una simulazione Montecarlo, i risultati ottenuti con le formule di Creditrisk+. Anche in questo caso, la percentuale di perdite osservate al di sopra dei percentili stimati in precedenza è perfettamente coerente con le attese; anche quando il default dipende da una pluralità di fattori macroeconomici, dunque, la stima della distribuzione delle perdite appare accettabile.

* * *

Veniamo infine ad esaminare gli effetti di talune particolarità dei portafogli reali che non sono direttamente riproducibili all'interno di CreditRisk+.

La distribuzione delle perdite per il portafoglio benchmark utilizzato in precedenza è stata infatti ottenuta:

- arrotondando gli importi attraverso una procedura di banding che ci consentisse di usare una variabile casuale discreta;
- ipotizzando di conoscere con certezza il tasso di recovery in caso di default;

Attraverso una simulazione Montecarlo (cfr. tavola 4.5) abbiamo rimosso queste ipotesi. In particolare, dopo aver eliminato gli arrotondamenti dovuti al banding (scenario A1), abbiamo ipotizzato che:

- i tassi di severity dei singoli crediti, pur essendo incorrelati tra loro, potessero essere superiori o inferiori a quello atteso (e oscillino dal 50% al 90%⁵²) – scenario A2;
- le severity dei singoli crediti dipendessero, come le probabilità di default, dall'andamento del fattore macro⁵³ (scenario A3); si tratta di un'ipotesi ragionevole, in quanto è presumibile che, nelle fasi recessive, non solo aumenti il numero di imprese in dissesto, ma si riduca anche la percentuale di credito che la banca può recuperare.

⁵² Si tratta di un intervallo d'oscillazione abbastanza modesto. Inoltre, si è scelta una distribuzione di probabilità che privilegia i valori centrali e rende relativamente poco verosimili le oscillazioni verso casi estremi: una beta, costruita in modo tale da garantire che i 5/9 dei valori estratti si trovassero più vicini alla media che ai valori estremi dell'intervallo: ad esempio, nel caso del recovery rate, i 5/9 dei valori erano compresi tra 60% e 80%.

⁵³ In particolare, per ogni realizzazione r del fattore macro, sia x il valore della probabilità cumulata associata a r dalla distribuzione gamma di partenza. Il valore della severity viene scelto come x -esimo percentile della distribuzione beta, limitata tra 50% e 90%, da cui provengono i tassi di recupero stocastici. In questo modo, valori elevati del fattore macro (che denotano scenari di recessione) corrispondono a severity prossime al 90%, mentre se il fattore macro assume valori contenuti, anche la severity risulterà di poco superiore al 50%.

Tavola 4.5

**Perdite dello scenario base generato con CreditRisk+
e di scenari alternativi generati con una simulazione Montecarlo**

		<i>Scenario</i>			
		<i>Base</i>	<i>A1</i>	<i>A2</i>	<i>A3</i>
<i>Banding</i>		<i>sì</i>	<i>no</i>	<i>no</i>	<i>no</i>
<i>Recovery rates stocastici</i>		<i>no</i>	<i>no</i>	<i>sì</i>	<i>sì</i>
<i>Recovery rates correlati</i>		<i>no</i>	<i>no</i>	<i>no</i>	<i>sì</i>
<i>Perdita attesa</i>		45.79	46.26	45.81	59.85
<i>Errore standard</i>		98.27	98.17	97.84	127.16
<i>Percentili</i>	95	232	236	234	305
	99	480	482	483	624
	99.5	596	595	592	770
	99.9	876	855	860	1,113
<i>Percentuale di casi risultati superiori ai percentili dello scenario base negli scenari A1-A3</i>	95		5.16%	5.06%	7.53%
	99		1.01%	1.02%	2.05%
	99.5		0.50%	0.49%	1.16%
	99.9		0.08%	0.09%	0.29%

Tutti gli importi sono multipli di 10.000€

I risultati illustrati nella tavola possono essere sintetizzati come segue:

- l'effetto del banding sulla qualità delle stime appare assolutamente trascurabile; di conseguenza, lavorando su un portafoglio abbastanza vasto (dove approssimazioni per eccesso e per difetto tendono a compensarsi) e con un sistema di bande sufficientemente fine⁵⁴, si può ritenere che la "discretizzazione" degli importi a rischio non danneggi in misura sensibile il risultato finale.
- La simulazione relativa allo scenario base rimane sufficientemente accurata anche quando si passa a recovery rates stocastici: l'errore standard dello scenario A2, infatti, non si discosta in misura significativa da quello relativo alle simulazioni precedenti. Inoltre, la percentuale di casi con perdite superiori ai percentili dello scenario base è assolutamente coerente con i percentili dello scenario stesso. Un simile risultato è apparentemente sorprendente: si direbbe, infatti, che il rischio di recovery (una componente assai rilevante del rischio complessivo fronteggiato da una banca) possa essere ragionevolmente ignorato, visto che il suo ingresso nei nostri scenari sperimentali non sembra portare a variazioni di rilievo. In effetti, ciò accade perché si è supposto che i recovery rates dei singoli debitori siano stocastici ma incorrelati tra loro: di conseguenza, la legge dei grandi numeri garantisce che variazioni positive e negative rispetto al recovery rate atteso finiscano per compensarsi vicendevolmente⁵⁵.
- La simulazione A3 pone invece una pesante riserva sull'efficacia del modello CreditRisk+ in situazioni sufficientemente generali: in effetti, l'introduzione di una correlazione tra probabilità di insolvenza e tasso di recovery (che in questo scenario reagiscono congiuntamente alle variazioni della congiuntura), se da un lato non pare un'ipotesi particolarmente peregrina ed irrealistica, dall'altro ha effetti pesanti sul grado di affidabilità delle stime generate dallo scenario base. L'errore standard risulta infatti superiore di oltre il 30%, e i percentili vengono

⁵⁴ Nel portafoglio utilizzato per le nostre simulazioni, la dimensione media degli importi a rischio, già al netto del recovery rate atteso, è nell'ordine di €80.000, mentre l'approssimazione media implicita nel passaggio a bande di ampiezza pari a €10.000 è pari a €2.500. Di conseguenza, l'impatto medio del banding, per il nostro esempio, è nell'ordine del 3% (2.500/80.000)

⁵⁵ Di conseguenza, l'introduzione di recovery rates stocastici, estratti da una distribuzione beta ma incorrelati (che è poi anche la soluzione proposta dagli autori di un modello assai popolare e autorevole come CreditMetrics...) non sembra aggiungere nulla all'accuratezza dei risultati.

pesantemente rivisti verso l'alto (visto che la percentuale di casi con perdite superiori ai percentili dello scenario benchmark è sistematicamente più alta del previsto). Ancor più significativo è il fatto che anche la perdita media si collochi su livelli sensibilmente superiori alle attese⁵⁶, così che una riserva dimensionata secondo le prescrizioni di CreditRisk+ si dimostrerebbe incapiente anche rispetto al livello "normale" delle perdite future (ed i prestiti emessi in passato si rivelerebbero, ovviamente, *mispriced* per difetto).

Questi risultati, e segnatamente l'ultimo, suggeriscono la necessità, da un lato, di verificare empiricamente l'esistenza di una correlazione tra frequenze di default passate e recovery rates, dall'altro di modificare la struttura del modello di partenza per poter tenere conto delle oscillazioni nel tasso di severity. Una strada promettente pare quella di incorporare, nel concetto di "perdita per euro prestato" (e_i/v_i) la variabilità del tasso di recupero, ricalcolando opportunamente i parametri delle distribuzioni gamma che descrivono la variabilità del numero di insolvenze atteso dai singoli settori (o fattori).

5 Osservazioni conclusive

In questo lavoro, partendo da una breve ricognizione del rischio di credito e delle caratteristiche di un sistema di credit risk management ottimale, si è cercato di offrire al lettore una panoramica sulle caratteristiche di CreditRisk+, un fortunato modello di stampo attuariale.

Si è visto come la scelta di un approccio "assicurativo" al monitoraggio del portafoglio prestiti non richieda in nessun modo alla banca di "abdicare" alla sua naturale vocazione all'analisi ed alla selezione delle opportunità di finanziamento per affidarsi esclusivamente alle virtù taumaturgiche della legge dei grandi numeri; al contrario, anche vista attraverso la lente attuariale la funzione creditizia della banca continua a richiedere opportune politiche di selezione, segmentazione e pricing del portafoglio di impieghi.

Si è poi scelto di dedicare una presentazione minuziosa al modello CreditRisk+, assistendo il lettore con esempi numerici via via più complessi; ci si è concentrati su un nucleo centrale di concetti portanti, nell'intento di consentire la piena comprensione anche dei loro risvolti statistici e algebrici (in ciò aiutandoci con alcune appendici). In particolare, si è cercato di rendere chiaro il meccanismo attraverso il quale, partendo da distribuzioni condizionali delle perdite in cui i singoli crediti sono incorrelati tra loro, diventa possibile costruire una distribuzione non condizionale, valida per tutte le possibili svolte del ciclo macroeconomico (e contraddistinta da un'implicita correlazione positiva dei default).

Nell'ultima parte del lavoro si è verificato, con l'aiuto di simulazioni montecarlo, il grado di affidabilità del modello Creditrisk+ al variare dei meccanismi che governano le probabilità di insolvenza dei debitori e la severity delle perdite. Ne sono scaturiti, come si è visto, inviti alla cautela circa l'effettiva applicabilità del modello a situazioni reali.

Per quanto simili riserve possano essere giustificate, e suggeriscano ulteriori approfondimenti, è evidente che esse non intaccano la validità e l'appello concettuale dei modelli di stampo attuariale, che rappresentano, agli occhi di chi scrive, un'importante riserva di tecniche per descrivere, misurare, da ultimo governare i rischi finanziari delle banche. Nutriamo l'immodesta speranza che questo lavoro possa contribuire, in misura infinitesima, alla loro diffusione presso il nostro sistema bancario, così che dal confronto tra modelli teorici, esperienza manageriale e dati empirici possano scaturire gli affinamenti necessari a renderne più immediata e sicura l'applicazione.

⁵⁶ Il risultato è perfettamente corretto dal punto di vista statistico: ricordiamo infatti che la media del prodotto di due variabili casuali $E(xy)$ è pari al prodotto delle loro medie ($E(x)E(y)$) solo se la loro covarianza è nulla.

Bibliografia

- Bellucci M. Micocci M., Resti A., Scoccia V. (1999) “Modelli di controllo del rischio di portafoglio crediti: da Creditmetrics a CreditRisk+”, in Szegö G.P., Varetto F. (eds.) *Il rischio creditizio, misura e controllo*, Utet, Torino.
- Bennett P. (1999) “La teoria del portafoglio nei crediti bancari” in Szegö G.P., Varetto F. (eds.) *Il rischio creditizio, misura e controllo*, Utet, Torino.
- BRI - Banca dei Regolamenti Internazionali (1999) *Credit Risk Modeling: current Practices and Applications*, Basle Committee on Banking Supervision, Basilea.
- Caouette J.B., Altman E.I., Narayanan P. (1998) *Measuring Credit Risk - The next great financial Challenge*, John Wiley & sons, New York
- Cocco F., XXX, in Savona P., Sironi A. *La gestione del rischio di credito nelle grandi banche italiane*, Bancaria, Roma.
- Comana M., Modina M. (1998) “La redditività dei prestiti bancari: evidenze empiriche e proposte migliorative”, *Materiali Assbank*, n .22, Milano.
- Credit Suisse Financial Products (1997) *CreditRisk+ - A Credit Risk Management Framework*, Crédit Suisse Financial Products, London.
- Crouhy M., Galai D., Mark R. (2000) “A comparative analysis of current credit risk models”, *Journal of Banking and Finance*, 24(1-2), 59-117.
- Daykin C.D., Pentikäinen T, Pesonen M. (1994) *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London.
- De Laurentis G. (1999a), “I processi di rating e i modelli di scoring”, in Sironi A. e Marsella M. (a cura di), *La misurazione e la gestione del rischio di credito: modelli, strumenti e politiche*, Bancaria Editrice, 59-83.
- De Laurentis G. (1999b), “Evoluzione delle logiche e degli strumenti di controllo del rischio di credito”, *APB News*, n.1, 17-29.
- Dell'Amore G. (1965) *Economia delle aziende di credito. I prestiti bancari*. Giuffrè, Milano.
- Finger C. C. (1998) *Sticks and stones*, The Riskmetrics Group, New York.
- Finger C. C. (1999) “Conditional Approaches for CreditMetrics Portfolio Distributions” *CreditMetrics Monitor*, April.
- Ford J.K. (1998) “Measuring Portfolio Diversification”, *The Journal of Lending and Credit Risk Management*, February, 50-53.
- Gollinger T.L., Morgan J.B. (1993) “Calculation of an efficient Frontier for a commercial Loan Portfolio”, *Journal of Portfolio Management*, winter, 39-46.
- Gordy M.B. (2000), “A comparative anatomy of credit risk models”, *Journal of Banking and Finance*, 24(1-2), 119-149
- Locatelli R. (1995) *Rischio e intermediazione nelle banche e negli assicuratori*, Il Mulino, Bologna.
- Lusignani G. (1996) *La gestione dei rischi finanziari nella banca*, il Mulino, Bologna.
- McKinsey & Co. (1998) *Credit Portfolio View - A credit portfolio risk measurement and management approach - Approach document*, McKinsey & Co., Zurich.
- Rohatgi V.K. (1976) *An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York.

Saita F. (2000) “I modelli per la misurazione del rischio di credito: un quadro di sintesi” in Savona P., Sironi A. (eds.) *La gestione del rischio di credito nelle grandi banche italiane*, Bancaria, Roma.

Sironi A. (2000) “Un approccio multinomiale semplificato a tassi di perdita per le banche europee” in Savona P., Sironi A. *La gestione del rischio di credito nelle grandi banche italiane*, Bancaria, Roma.

Sironi A. (1999a) “Dalla probabilità di insolvenza al VAR di un portafoglio: obiettivi, approcci alternativi e applicazioni” in Sironi A, Marsella M. (eds.) *La misurazione e la gestione del rischio di credito - Modelli, strumenti e politiche*, Bancaria, Roma.

Sironi A. (1999b) “La misurazione del VAR di un’esposizione creditizia” in Sironi A, Marsella M. (eds.) *La misurazione e la gestione del rischio di credito - Modelli, strumenti e politiche*, Bancaria, Roma.

Volpe Di Prignano E. (1985) *Manuale di matematica finanziaria*, Edizioni Scientifiche Italiane, Napoli.

Appendici

A. La funzione generatrice delle probabilità⁵⁷

Si definisce funzione generatrice delle probabilità $F(z)$ una funzione di una variabile ausiliaria z costruita in modo tale che, dal suo sviluppo con formula di McLaurin, è possibile dedurre l’intera distribuzione di probabilità di una variabile casuale discreta v .

Più precisamente, se

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

rappresenta lo sviluppo di $F(z)$ con formula di McLaurin, allora $p(n)$ esprime la probabilità che v sia uguale a n .

Nella derivazione del modello attuariale per il rischio di credito possono risultare utili alcune proprietà delle funzioni generatrici delle probabilità (d’ora in poi: f.g.p.). In particolare:

(1) Se v_1 e v_2 sono due variabili casuali indipendenti, con f. g. p. rispettivamente $F(z_1)$ e $F(z_2)$, allora la variabile casuale somma ($v \equiv v_1 + v_2$) è data dal prodotto delle due f. g. p. ($F(z) \equiv F(z_1) \cdot F(z_2)$);

(2) Se $F(z)$ è la f.g.p. di una variabile casuale v con media μ e varianza σ^2 , valgono le relazioni:

$$m = \left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=1}; \quad s^2 + m^2 = \left(\left. \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{dF}{dz} \right) \right|_{z=1}$$

B. Algoritmo per il calcolo delle perdite quando la probabilità è nota.

La probabilità di incorrere in perdite di ammontare nL è data dal termine associato a z^n nello sviluppo di McLaurin della [3.9], cioè da:

$$p(n) = \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ \left. \frac{dG(z)}{dz} \right\} \right|_{z=0} \quad [a.1]$$

⁵⁷ Cfr. Rohatgi (1976)

Poiché $G(z)$ è un'esponenziale,

$$\frac{dG(z)}{dz} = G(z) \underbrace{\frac{d}{dz} \left\{ \sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j z^{v_j} \right\}}_{\equiv H(z)} = G(z)H(z) \quad [\text{a.2}]$$

così che

$$p(n) = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{G(z)H(z)\} \Big|_{z=0} \quad [\text{a.3}]$$

Applicando la regola di Eulero sulla derivata n -esima di un prodotto

$$\frac{d^q}{dz^q} \{G(z)H(z)\} = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} G^{(q-k)} H^{(k)}$$

(dove si è indicata con $F^{(k)}$ la derivata k -esima della generica funzione $F(z)$), si ottiene

$$p(n) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \underbrace{G^{(n-1-k)} \Big|_{z=0}}_A \underbrace{H^{(k)} \Big|_{z=0}}_B \quad [\text{a.4}]$$

Sviluppando separatamente A avremo:

$$\frac{d^{n-1-k}}{dz^{n-1-k}} G(z) \Big|_{z=0} = (n-k-1)! \frac{1}{(n-k-1)!} \frac{d^{n-1-k}}{dz^{n-1-k}} G(z) \Big|_{z=0} = (n-k-1)! p(n-k-1)$$

Per sviluppare B conviene far mente locale sul fatto che

$$\frac{d^n}{dz^n} \left\{ \sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j z^{v_j} \right\} \Big|_{z=0} = \begin{cases} 0 & n > v_j \\ n! \mathbf{m}_j & n = v_j \\ 0 & n < v_j \end{cases}$$

Il nostro B coincide con l'espressione qui sopra, se si pone $n=k+1$. Dunque avremo:

$$B = \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \left\{ \sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j z^{v_j} \right\} \Big|_{z=0} = \begin{cases} 0 & k \neq v_j - 1 \\ (k+1)! \mathbf{m}_j & k = v_j - 1 \end{cases}$$

Risostituiamo A e B nella [a.4], e consideriamo solo i termini della sommatoria per cui $k=v_j-1$ (perché diversamente B si annulla). Otteniamo:

$$\begin{aligned}
p(n) &= \sum_{k \leq n-1} \frac{1}{n!} \binom{n-1}{k} (n-k-1)! p(n-k-1) (k+1)! \mathbf{m}_j = \\
&= \sum_{k \leq n-1} \frac{(n-1)! (n-k-1)! (k+1)!}{n! k! (n-k-1)!} p(n-k-1) \mathbf{m}_j = \\
&= \sum_{j|v_j \leq n} \frac{\mathbf{m}_j v_j}{n} p(n-v_j) = \frac{\sum_{j|v_j \leq n} \mathbf{e}_j p(n-v_j)}{n}
\end{aligned} \tag{a.5}$$

(dove abbiamo fatto uso della definizione di \mathbf{m}_j e dell'uguaglianza $k+1=v_j$).

La [a.5] è una relazione recursiva con cui è possibile generare tutti i $p(n)$. Per inicializzarla, è sufficiente ricordare che

$$p(0) = G(0) = e^{-m}$$

Nell'esempio del paragrafo 3.2, la [a.5] è stata utilizzata come segue:

$$\begin{aligned}
p(0) &= e^{-m} \\
p(1) &= \mathbf{e}_1 p(0) \\
p(2) &= \frac{\mathbf{e}_1 p(1) + \mathbf{e}_2 p(0)}{2} \\
p(3) &= \frac{\mathbf{e}_1 p(2) + \mathbf{e}_2 p(1) + \mathbf{e}_3 p(0)}{3} \\
&\dots
\end{aligned}$$

generando i valori riportati nella tavola 3.6.

C. Crediti con orizzonte temporale pluriennale

La distribuzione delle perdite su un orizzonte di un anno generata attraverso un modello binomiale come CreditRisk+, fatica a dare conto in modo esaustivo del rischio associato con crediti a medio-lungo termine.

Il motivo (come già si è detto nel §2.2) è che, dopo il primo anno di vita, i crediti pluriennali rimasti in bonis vengono considerati alla stregua di importi certi, come se fossero giunti a scadenza ed il debitore li avesse regolarmente rimborsati. In realtà, visto che l'importo prestatto è ancora nella disponibilità del prenditore, e non della banca, sono ancora possibili perdite.

In un modello multinomiale, la probabilità di insolvenza futura di un credito ancora in circolazione al termine dell'orizzonte di rischio (cioè, di norma, del primo anno) viene incorporata nel rating di quel credito, dunque nel valore economico ad esso associato (attraverso un mark-to-market del prestito o una revisione delle riserve necessarie).

In un modello binomiale, invece, è necessario estendere l'orizzonte di rischio oltre il primo anno, seguendo le possibili evoluzioni del credito fino alla sua scadenza naturale. Per questo, nella documentazione tecnica di CreditRisk+ trova spazio una breve traccia per l'estensione del modello ad un orizzonte di rischio pluriennale. In questa appendice, riprendiamo e sviluppiamo quella traccia, cercando di spiegarne la logica ed i limiti.

Il passaggio ad un orizzonte pluriennale fa sì che ogni credito non sia più descritto semplicemente da un importo e da una probabilità di default, ma da un vettore di esposizioni $\mathbf{v}_j = \{v_j^i\}$ e da un

corrispondente vettore di probabilità di default $\mathbf{p}_j = \{p_j^t\}$ con $t=1, \dots, T$ ⁵⁸. Questo profilo temporale del rischio di insolvenza associato ad una posizione viene detto “term structure of default”.

Procediamo con un esempio. Fissiamo a 2 anni l’orizzonte di rischio finale (cioè la scadenza dei nostri crediti a lungo termine) e consideriamo un primo debitore ($j=1$). La sua *term structure of default* è data dalla tavola d.1 (dove gli importi, v_j^t vanno moltiplicati per l’unità di misura L prescelta ai fini del banding).

Tavola d.1
Term structure of default
di un primo credito

t	v_j^t	p_j^t
0	5	1%
1	5	2%
2	1	3%

Osserviamo che gli importi a rischio vanno diminuendo col passare del tempo (ad esempio, tra $t=1$ e $t=2$ è previsto un forte rimborso); inoltre, le probabilità sono non-condizionali (ad esempio, p_j^2 non è condizionale alla sopravvivenza del credito al tempo 0 e al tempo 1) o, per usare un termine largamente usato nella letteratura sui modelli a orizzonte pluriennale⁵⁹, probabilità *marginali*.

Costruiamo la f.g.p. di questo primo credito:

$$G_1(z) = 1 - \sum_t p_1^t + \sum_t p_1^t z^{v_1^t} = 1 + \sum_t p_1^t (z^{v_1^t} - 1) \quad [d.1]$$

che, nel caso dei valori riportati nella tavola d.1, equivale a:

$$G_1(z) = 0,94 + 0,03z + 0,03z^5$$

Da questa espressione si evince che le due possibili perdite di ammontare pari a 5 (al tempo 0 e al tempo 1) vengono trattate come omogenee (e le loro probabilità vengono sommate); la [d.1] non considera quindi il valore finanziario del tempo, e per questo motivo la tabella d.1 dovrà essere alimentata usando i valori attuali degli importi a rischio futuri, ovviamente arrotondati all’intero più vicino con il consueto processo di *banding*.

Per vedere come la [d.1] sia estensibile al caso di un portafoglio, consideriamo i dati di un secondo credito, riportati nella tavola d.2. Anche in questo caso sarà possibile calcolare una f.g.p. ($G_2(z)$), simile a quella vista in precedenza.

⁵⁸ Naturalmente, per tenere conto degli arrotondamenti derivanti dal banding e della possibilità di recovery rates non nulli, sarebbe formalmente più corretto indicare ϵ_j^t/v_j^t al posto di p_j^t . Abbiamo tuttavia preferito p_j^t perché può essere visto direttamente come una probabilità, e questo rende più immediata la comprensione della metodologia presentata in questa appendice.

⁵⁹ Cfr. ad es. Sironi, 2000.

Tavola d.1
**Term structure of default
di un secondo credito**

t	v_j^t	p_j^t
0	10	0,5%
1	10	0,8%
2	5	1,2%

Poiché i due crediti sono indipendenti, la f.g.p. delle perdite sull'intero portafoglio sarà data dal prodotto delle f.g.p. individuali. Utilizzando l'approssimazione lineare del logaritmo già vista nel paragrafo 3.1 del testo, tale $G(z)$ potrà scriversi come:

$$G(z) = e^{\sum_j \sum_t p_j^t \left[z^{v_j^t - 1} \right]}$$

o, meglio (sostituendo p_j^t con e_j^t/v_j^t , che è più corretto):

$$G(z) = e^{\sum_j \sum_t \frac{e_j^t}{v_j^t} \left[z^{v_j^t - 1} \right]}. \tag{d.2}$$

Anche per questa espressione esiste una formula recursiva simile a quella derivata nell'appendice B, che è data da:

$$p(n) = \sum_{j,t | v_j^t \leq n} \frac{e_j^t}{n} p(n - v_j^t) \tag{d.3}$$

Applicandola, possiamo ottenere la distribuzione delle probabilità associate a qualsiasi livello di perdita futura. Nel caso del portafoglio rappresentato dai due crediti visti in precedenza, la distribuzione stimata con la [d.3] è quella indicata nella terza colonna della tavola d.3. Nella colonna successiva si riporta la "vera" distribuzione di probabilità (che, nel caso di un portafoglio di dimensioni ridotte come questo, può essere calcolata analiticamente): come si vede, l'approssimazione implicita nel passaggio alla distribuzione di Poisson mostra i suoi limiti anche nel caso multiperiodale, nel senso che assegna probabilità positive ad eventi impossibili (ad esempio, ad una perdita pari a 20.000) e finisce quindi per sottostimare la probabilità associata ad altri eventi (ad esempio, a una perdita pari a 10.000).

Tavola d.3

**Portafoglio di due crediti:
distribuzione di probabilità stimata e reale**

n	L x n	Probabilità stimate	Probabilità reali
0	-	91.85%	91.65%
1	10,000	2.76%	2.93%
2	20,000	0.04%	0.00%
3	30,000	0.00%	0.00%
4	40,000	0.00%	0.00%
5	50,000	3.86%	4.05%
6	60,000	0.12%	0.04%
7	70,000	0.00%	0.00%
8	80,000	0.00%	0.00%
9	90,000	0.00%	0.00%
10	100,000	1.28%	1.26%
11	110,000	0.04%	0.04%
12	120,000	0.00%	0.00%
13	130,000	0.00%	0.00%
14	140,000	0.00%	0.00%
15	150,000	0.05%	0.04%

L'esempio qui riportato è relativo al caso più semplice, in cui i tassi di default sono noti a priori. Tuttavia, vista la stretta analogia tra la [d.2] e la [3.9] nel testo, è facile convincersi che la sua estensione al caso stocastico non presenta particolari difficoltà.

D. Algoritmo per il calcolo delle perdite quando la probabilità di default è stocastica

In questa appendice riportiamo un algoritmo per il calcolo delle probabilità associate ai diversi livelli di perdita partendo dalla f.g.p. descritta dalla [3.30]. Lo facciamo ripercorrendo la documentazione tecnica⁶⁰ di CreditRisk+, cercando di renderne maggiormente comprensibili i passaggi più delicati.

Per prima cosa, enunceremo un teorema, di portata assolutamente generale, su cui si basa l'algoritmo di calcolo presentato nel seguito. Dopo aver dimostrato il teorema, vedremo come esso trovi applicazione nel caso della nostra f.g.p.. Concluderemo presentando un esempio pratico di applicazione, utilizzato per calcolare i valori riportati nella tavola 3.11 di questo lavoro.

Il teorema di cui ci serviremo per costruire il nostro algoritmo è il seguente. Se

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0} z^n \quad [d.1]$$

è una funzione espandibile in serie di McLaurin e tale che la derivata del suo logaritmo può essere riscritta come il quoziente di due polinomiali, cioè tale che

$$\frac{d \log G(z)}{dz} = \frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_r z^r}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_s z^s}, \quad [d.2]$$

⁶⁰ Cfr. Credit Suisse Financial Products (1997), appendice A.10.

allora ogni coefficiente $p(n+1)$ della sua espansione in serie di McLaurin può essere calcolato come una funzione dei coefficienti di ordine inferiore e dei coefficienti delle due polinomiali $A(z)$ e $B(z)$, secondo la seguente formula:

$$p(n+1) = \frac{1}{b_0(n+1)} \left\{ \sum_{i=0}^{\min(n,r)} a_i p(n-i) - \sum_{j=0}^{\min(n-1,s-1)} b_{j+1} (n-j) p(n-j) \right\} \quad [d.3]$$

Da cui segue, ad esempio, che

$$p(1) = \frac{a_0 p(0)}{b_0}$$

e che

$$p(2) = \frac{1}{2b_0} \{a_0 p(1) + a_1 p(0) - b_1 p(1)\}$$

e

$$p(3) = \frac{1}{3b_0} \{a_0 p(2) + a_1 p(1) + a_2 p(0) - 2b_1 p(2) - b_2 p(1)\}$$

E' evidente che, se $G(z)$ rappresenta una f.g.p., questo teorema ci fornisce una serie di espressioni recursive per il calcolo delle probabilità associate a diversi livelli di perdita, non dissimili da quelle riportate alla fine dell'appendice B; tuttavia, ora, per poter calcolare queste probabilità, ci sarà richiesto di conoscere anche i coefficienti delle due polinomiali $A(z)$ e $B(z)$ con cui (per ipotesi) può essere riscritta la f.g.p..

Prima di vedere come il teorema possa applicarsi al caso specifico della f.g.p. indicata dalla [3.30], forniamone una breve dimostrazione. Per ipotesi:

$$B(z) \frac{dG(z)}{dz} = A(z)G(z)$$

che è come dire

$$\begin{aligned} B(z) \sum_{n=1}^{\infty} n p(n) z^{n-1} &= A(z) \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \\ \sum_{j=0}^s b_j z^j \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p(n+1) z^n &= \sum_{i=0}^r a_i z^i \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \\ \sum_{j=0}^s \sum_{n=0}^{\infty} b_j (n+1) p(n+1) z^{n+j} &= \sum_{i=0}^r \sum_{n=0}^{\infty} a_i p(n) z^{n+i} \end{aligned}$$

Consideriamo ora il primo membro e individuiamo tutti gli addendi per cui z ha grado $n+j=m$: si tratterà dei termini con $j=0,1,\dots,m$ e insieme $n=m-j$. Se però fosse $m>s$ occorrerebbe limitarsi a prendere in considerazione i $j=0,1,\dots,s$, perché nel polinomio $B(z)$ non esiste un b_{s+1} .

Il primo membro può allora risciversi come

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{j=0}^{\min(m,s)} b_j (m-j+1) p(m-j+1)$$

e con un ragionamento analogo il secondo membro diventa

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m \sum_{i=0}^{\min(m,r)} a_i p(m-i)$$

L'uguaglianza tra i due membri può dunque scriversi come

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m \left\{ \sum_{j=0}^{\min(m,s)} b_j (m-j+1) p(m-j+1) - \sum_{i=0}^{\min(m,r)} a_i p(m-i) \right\} = 0$$

Come calcolare, in concreto, un vettore di coefficienti a_i e b_j che soddisfino questa condizione? Possiamo imporre che il coefficiente associato a qualsiasi z^m sia nullo, cioè che sia

$$\sum_{j=0}^{\min(m,s)} b_j (m-j+1) p(m-j+1) = \sum_{i=0}^{\min(m,r)} a_i p(m-i) \quad \forall m$$

Da cui segue che

$$b_0 (m+1) p(m+1) + \sum_{j=0}^{\min(m-1,s-1)} b_{j+1} (m-j) p(m-j) = \sum_{i=0}^{\min(m,r)} a_i p(m-i) \quad \forall m$$

cioè

$$p(m+1) = \frac{1}{b_0 (m+1)} \left\{ \sum_{i=0}^{\min(m,r)} a_i p(m-i) - \sum_{j=0}^{\min(m-1,s-1)} b_{j+1} (m-j) p(m-j) \right\} \quad \forall m$$

A questo punto, con un semplice cambio di notazione (n anziché m), ritroviamo la [d.3], che rimane dimostrata.

Vediamo ora come essa si applichi alla funzione generatrice di probabilità di CreditRisk+ (equazione 3.30 nel testo). Derivando

$$\log(G(z)) = \sum_k \log G_k(z) = \sum_k \mathbf{a}_k \log \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\mathbf{m}_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\bar{\mathbf{e}}_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} z^{v_j^{(k)}}} \right) \quad [\text{d.4}]$$

otteniamo

$$\frac{d \log(G(z))}{dz} = \sum_k \frac{\frac{\mathbf{a}_k p_k}{\mathbf{m}_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \bar{\mathbf{e}}_j^{(k)} z^{v_j^{(k)}-1}}{1 - \frac{p_k}{\mathbf{m}_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\bar{\mathbf{e}}_j^{(k)}}{v_j^{(k)}} z^{v_j^{(k)}}} \quad [\text{d.5}]$$

Per poter applicare la [d.3] a questa derivata logaritmica, è ora sufficiente riuscire a riscriverla come quoziente di due polinomiali, cioè come

$$\frac{d \log G(z)}{dz} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_r z^r}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_s z^s}.$$

A conclusione di questa appendice, concentriamoci su un caso specifico, e mostriamo come sia possibile costruire i polinomi $A(z)$ e $B(z)$ nel caso dell'esempio riportato nella tavola 3.11 di questo lavoro. Le formule che deriveremo ora, peraltro, sono state usate anche nei calcoli confrontati, nel paragrafo 4, con gli esiti di una simulazione Montecarlo.

Consideriamo due soli settori, industria ($k=I$) e servizi ($k=S$), ognuno con un suo vettore di parametri (cfr. anche la tavola 3.10 nel testo) e diviso, ai fini del banding, in un certo numero di fasce corrispondenti agli importi $v_i^I = 1, 2, i, \dots, m(I)$ per l'industria, $v_s^S = 1, 2, s, m(S)$ per i servizi..

In questo caso specifico, la [d.5] può scriversi come

$$\frac{d \log(G(z))}{dz} = \frac{\sum_{i=0}^{m(I)-1} a_i^I z^i}{1 - \sum_{i=1}^{m(I)} b_i^I z^i} + \frac{\sum_{s=0}^{m(S)-1} a_s^S z^s}{1 - \sum_{s=1}^{m(S)} b_s^S z^s} \quad [d.6]$$

avendo posto

$$a_i^I = \frac{\mathbf{a}_I p_I \bar{\mathbf{e}}_{i+1}^{(I)}}{m_I}; b_i^I = \frac{p_I \bar{\mathbf{e}}_i^{(I)}}{i m_I}; a_s^S = \frac{\mathbf{a}_S p_S \bar{\mathbf{e}}_{s+1}^{(S)}}{m_S}; b_s^S = \frac{p_S \bar{\mathbf{e}}_s^{(S)}}{s m_S}$$

E' quindi possibile calcolare il denominatore comune tra le due frazioni nella [d.6], ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{A(z)}{B(z)} &= \frac{\sum_{i=0}^{m(I)-1} a_i^I z^i + \sum_{s=0}^{m(S)-1} a_s^S z^s - \sum_{i=0}^{m(I)-1} \sum_{s=1}^{m(S)} a_i^I b_s^S z^{i+s} - \sum_{s=0}^{m(S)-1} \sum_{i=1}^{m(I)} a_s^S b_i^I z^{i+s}}{1 - \sum_{i=1}^{m(I)} b_i^I z^i - \sum_{s=1}^{m(S)} b_s^S z^s + \sum_{i=1}^{m(I)} \sum_{s=1}^{m(S)} b_i^I b_s^S z^{i+s}} = \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{m(I)-1} a_i^I z^i + \sum_{s=0}^{m(S)-1} a_s^S z^s - \sum_{j=1}^{m(I)+m(S)-1} \left[\sum_{i=\max(0, j-m(S))}^{\min(j-1, m(I)-1)} a_i^I b_{j-i}^S + \sum_{s=\max(0, j-m(I))}^{\min(j-1, m(S)-1)} a_s^S b_{j-s}^I \right] z^j}{1 - \sum_{i=1}^{m(I)} b_i^I z^i - \sum_{s=1}^{m(S)} b_s^S z^s + \sum_{j=2}^{m(I)+m(S)} \sum_{i=\max(1, j-m(S))}^{\min(j, m(I))} b_i^I b_{j-i}^S z^j} \end{aligned}$$

da cui si evince che i coefficienti a_j e b_j delle due polinomiali sono dati da

$$a_j = a_{i=j}^I V\{j \leq m(I) - 1\} + a_{s=j}^S V\{j \leq m(S) - 1\} +$$

$$- \left(\sum_{i=\max(0, j-m(S))}^{\min(j-1, m(I)-1)} a_i^I b_{j-i}^S + \sum_{s=\max(0, j-m(I))}^{\min(j-1, m(S)-1)} a_s^S b_{j-s}^I \right) V\{1 \leq j \leq m(I) + m(S) - 1\}$$

$$b_0 = 1$$

$$b_{j>0} = \sum_{i=\max(1, j-m(S))}^{\min(j, m(I))} b_i^I b_{j-i}^S z^j V\{2 \leq j \leq m(I) + m(S)\} - b_{i=j}^I V\{j \leq m(I)\} - b_{s=j}^S V\{j \leq m(S)\}$$

dove i termini del tipo $V\{c\}$ valgono 1 se la condizione c è vera, zero altrimenti.

I valori così calcolati sono stati utilizzati come input per l'equazione [d.3], ottenendo come risultato i valori di probabilità $p(n)$ associati a perdite di importo nL (cfr. tav. 3.11).