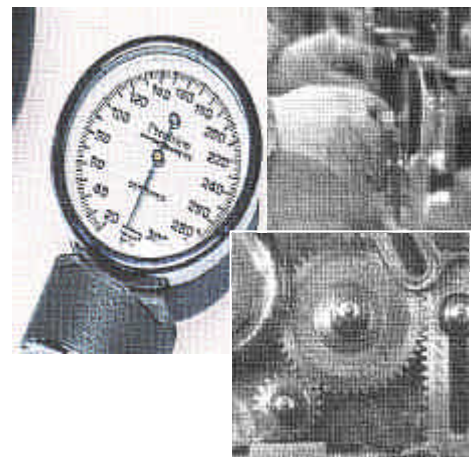


## 2.1 Un modello multinomiale semplificato

ANDREA SIRONI



- 2.1.1. *Introduzione*
- 2.1.2. *La scelta dell'orizzonte temporale di riferimento*
- 2.1.3. *Matrici di transizione annuali e pluriennali*
- 2.1.4. *La stima del tasso di perdita attesa*
- 2.1.5. *La stima della perdita inattesa*
- 2.1.6. *Dalla perdita inattesa al VaR*
- 2.1.7. *La stima del VaR diversificato*
- 2.1.8. *Conclusioni*

### ✓ Highlights

*In questo capitolo l'attenzione si sposta dalle tecniche connesse alla stima delle probabilità di insolvenza e dei tassi di recupero, entrambe variabili necessarie per l'introduzione di un adeguato sistema interno di rating delle controparti e dei relativi affidamenti, a quelle connesse alla misurazione della perdita inattesa associata ai singoli prestiti e, in ultima analisi, al relativo capitale a rischio, ossia all'assorbimento di capitale degli stessi. Dopo una breve descrizione dei problemi che un modello deve affrontare per poter conseguire questi obiettivi e delle principali differenze metodologiche dei diversi approcci proposti a livello internazionale, viene illustrato un modello semplificato disegnato per il portafoglio prestiti di una banca commerciale europea.*

### 2.1.1 Introduzione

Seguendo la logica illustrata nell'introduzione di questo manuale, il profilo di rischio di un'esposizione creditizia può essere distinto in due componenti: la perdita attesa, funzione della probabilità di insolvenza, del tasso di recupero e dell'esposizione in caso di insolvenza, e la perdita inattesa, la quale a sua volta dipende essenzialmente dalla possibilità che i tassi effettivi di insolvenza e di recupero risultino a posteriori più elevati di quanto originariamente atteso dalla banca. Come ormai noto, la distinzione fra la prima e la seconda componente non rappresenta una semplice astrazione accademica ma riflette piuttosto una chiara esigenza operativa. Mentre infatti la perdita attesa deve trovare copertura in riserve esplicite o in rettifiche della relativa posta attiva, la perdita inattesa (cui corrisponde, come si vedrà un certo capitale a rischio), deve riflettersi in una corrispondente dotazione patrimoniale.

Nei precedenti capitoli del manuale l'attenzione si è concentrata sulla perdita attesa. Si sono dunque illustrate le tecniche, qualitative e quantitative, che una banca può adottare allo scopo di misurare nel modo più corretto possibile questa prima componente e si è illustrata una proposta concreta per l'introduzione di un sistema interno di rating delle controparti.

In questo capitolo l'attenzione si sposta invece sulla perdita inattesa di un'esposizione creditizia e sul successivo passaggio connesso alla stima del capitale economico assorbito da un prestito bancario. A questo scopo, si riprende il problema della definizione dell'orizzonte temporale (o orizzonte di rischio, cfr. il capitolo 1.2) e si affrontano ulteriori passaggi tecnici, come la scelta di un intervallo di confidenza

appropriato, che un modello di stima del valore a rischio (VaR) deve necessariamente affrontare. Successivamente viene presentato un modello semplificato che, analogamente a quanto effettuato nei precedenti capitoli, tenga adeguatamente in considerazione le caratteristiche tecniche e le informazioni tipicamente disponibili per il portafoglio crediti di una banca italiana.

## 2.1.2 La scelta dell'orizzonte temporale di riferimento

L'esistenza di una perdita inattesa deriva dal fatto che la componente attesa si fonda su stime relative alla probabilità di insolvenza ( $p$ ), al tasso di perdita (LGD) e all'esposizione in caso di insolvenza ( $EAD$ ), che possono a posteriori rivelarsi errate. Inoltre, non va dimenticato che la probabilità di insolvenza, anche se correttamente stimata, rappresenta solo il valore atteso di una variabile binomiale (il default) che assume di norma valori diversi dalla media. Per questi motivi, esiste la possibilità che il tasso di perdita si rilevi *ex-post* più elevato del previsto. Si tratta pertanto di stimare la potenziale variazione del tasso di perdita o, in altri termini, la variabilità che tale tasso può subire, rispetto alle originali aspettative, nel corso di un predefinito orizzonte temporale.

Liquidità e  
periodo di  
detenzione

La stima della perdita inattesa richiede dunque anzitutto di definire l'orizzonte temporale lungo il quale tale deterioramento può verificarsi. Nel capitolo 1.2 abbiamo anticipato alcune considerazioni che rendono consigliabile l'adozione di un orizzonte di un anno. Vediamo ora di riprenderle in maggior dettaglio.

- ✓ In linea di massima, la scelta dell'orizzonte temporale in un modello di misurazione del capitale a rischio dovrebbe basarsi su due fattori: il più importante, trattandosi di un modello di misurazione e controllo del rischio, è un fattore di tipo oggettivo, indipendente dalle aspettative del singolo operatore. Esso è rappresentato dal *grado di liquidità* del mercato di riferimento della posizione di rischio assunta. La logica sottostante al controllo del rischio dovrebbe infatti essere quella di imporre limiti che siano funzione anche dell'intervallo temporale in cui la singola posizione può essere chiusa.
- ✓ Un secondo fattore che può essere considerato nella determinazione dell'orizzonte temporale è invece di tipo soggettivo, nel senso che scaturisce direttamente dall'intento della singola banca. Si tratta del *periodo di detenzione (holding period)* della singola posizione, ossia del periodo di tempo per il quale la banca intende conservare in portafoglio l'esposizione.

Il problema  
dell'assenza di  
un mercato  
secondario dei  
prestiti

Entrambi i fattori risultano tuttavia poco utili nel caso del rischio di credito: è infatti evidente che da un lato l'illiquidità delle attività in esame (prestiti bancari) spingerebbe a considerare come intervallo temporale di riferimento la scadenza ultima delle stesse, dall'altro l'eventuale intenzione della banca di non tenere in portafoglio la singola esposizione fino alla sua naturale scadenza si scontra con lo scarso sviluppo, specie se si considera la realtà italiana, di un mercato secondario dei prestiti o di un mercato di strumenti derivati che consentano di trasferire ad altri soggetti l'esposizione creditizia conservando peraltro la relazione con il cliente (*credit derivatives*)<sup>1</sup>.

Se dunque l'obiettivo perseguito dalla banca impegnata nella misurazione della perdita inattesa - e sulla base di questa del capitale a rischio (VaR) di un'esposizione creditizia - è quello di valutare la perdita potenziale e conseguentemente stabilire dei limiti in termini di rischio alle unità che assumono le decisioni di affidamento, sembrerebbe inevitabile adottare come orizzonte temporale di riferimento quello della scadenza naturale della singola attività. Questa prima soluzione comporta di per sé notevoli problemi, legati da un lato alla necessità di orizzonti temporali differenziati in

<sup>1</sup> Per un'analisi del mercato e delle caratteristiche tecniche di questi prodotti si veda Sironi (1999).

funzione della scadenza delle singole esposizioni e dall'altro al fatto che numerose esposizioni creditizie sono contrattualmente prive di scadenza. Molte di queste ultime, peraltro, sono in realtà rappresentate da finanziamenti in conto corrente che assumono la forma di finanziamenti a medio-lungo termine. Per tali finanziamenti un'eventuale richiesta di rientro genererebbe un fenomeno di selezione avversa, nel senso che rientrerebbero dalle loro posizioni debitorie solo gli affidati in grado di farlo, ossia solo i crediti migliori, generando così un deterioramento della qualità del portafoglio della banca.

Orizzonte  
temporale di un  
anno

Una possibile soluzione a questi problemi è rappresentata dall'adozione di un orizzonte temporale di riferimento unico pari a un anno. E' questa la soluzione generalmente adottata dai modelli più noti, come CreditMetrics™, originariamente sviluppato dalla banca statunitense J. P. Morgan, e in parte anche CreditRisk+, sviluppato dalla banca d'investimento svizzera Credit Suisse Financial Products. Questi ultimi giustificano tale scelta sulla base del fatto che l'anno coincide in misura approssimativa con il periodo relativo al tasso di rotazione media del portafoglio. In questo senso, il periodo annuale, seppure sovente inferiore alla scadenza originaria dei singoli impieghi, fornisce un'indicazione di massima del tempo necessario per impostare un'azione correttiva volta a contenere il rischio in presenza di un deterioramento del merito creditizio delle esposizioni in portafoglio. Questa scelta appare poco giustificabile, specie se l'obiettivo del sistema di misurazione del rischio è di tipo "micro", ossia focalizzato sulla singola esposizione piuttosto che sull'intero portafoglio. Da questo punto di vista, infatti, se la singola esposizione ha vita residua superiore all'anno, l'eventuale rotazione del portafoglio non ha alcun impatto sulla stessa. In assenza di un mercato secondario liquido nel quale cedere la posizione, infatti, essa resta nel portafoglio della banca fino alla sua naturale scadenza.

I motivi della  
scelta di un  
unico orizzonte  
temporale

Nonostante questa critica alle motivazioni addotte a suo sostegno, l'adozione di un orizzonte temporale annuo unico per tutte le esposizioni è comunque giustificabile sulla base di due importanti argomentazioni.

- ✓ La coerenza con l'orizzonte temporale di riferimento adottato a fini di stima delle probabilità di insolvenza. Come si avrà modo di chiarire in seguito, la stima della perdita inattesa di un'esposizione creditizia, per quanto logicamente distinta da quella della perdita attesa, si fonda anch'essa sulle misure di probabilità di insolvenza e di migrazione. Una stima inadeguata della prima componente del rischio di credito rende inevitabilmente scorretta anche la fase successiva legata alla stima della perdita attesa. Ne segue che l'orizzonte temporale alla base delle tecniche di stima delle due componenti del rischio di credito deve essere il medesimo. Nel capitolo 1.2 (paragrafo 1.2.2) del presente manuale si era adottato un orizzonte annuo per la stima della probabilità di insolvenza delle controparti affidate.
- ✓ La coerenza con l'orizzonte temporale di riferimento adottato a fini di budget e di riallocazione periodica del capitale. Le finalità di una misurazione della perdita inattesa, e dunque del VaR di una singola esposizione, non si limitano infatti al semplice *risk-control*, ossia alla fissazione di limiti all'assunzione di rischio, ma si estendono ad altri aspetti quali la misurazione delle *risk-adjusted performance* e, più in generale, l'allocazione del capitale<sup>2</sup>. Il perseguimento di queste altre finalità richiede che l'orizzonte temporale di riferimento per la misurazione del rischio risulti coerente con altri aspetti quali la frequenza di revisione del *budget*, la frequenza di rilevazione dei risultati economici, la frequenza di revisione delle condizioni di tasso alla clientela, la frequenza di riallocazione periodica del capitale e ancora la liquidità del mercato del capitale di rischio della banca. Così, ad esempio, la misurazione delle performance corrette per il rischio necessita che le misure di

<sup>2</sup> Cfr. i capp. 3.2 e 3.3 di questo manuale.

rischio siano coerenti con la frequenza con la quale vengono periodicamente rilevati i risultati economici conseguiti dalle singole unità operative; analogamente, l'assegnazione di obiettivi di remunerazione del rischio alle unità operative comporta necessariamente un'integrazione con la periodicità del processo di *budgeting*: sarebbe infatti privo di senso attribuire obiettivi di redditività particolarmente ambiziosi senza coerentemente concedere limiti di rischio tali da consentire di realizzare gli stessi obiettivi. Con riferimento all'obiettivo di determinazione delle condizioni di tasso coerenti con il grado di rischio assunto<sup>3</sup>, è evidente che il fattore più rilevante ai fini della scelta dell'orizzonte temporale di riferimento è rappresentato dalla scadenza dei singoli impieghi; tuttavia, può assumere rilevanza anche l'eventuale esistenza di clausole contrattuali che consentano alla banca di rivedere il premio per il rischio (*spread*) e la periodicità con la quale ciò può avvenire. Infine, con riferimento all'obiettivo della riallocazione periodica del capitale, è sufficiente rilevare che la scelta dell'orizzonte temporale di riferimento dovrebbe in questo caso risultare coerente con la frequenza con la quale tale processo viene realizzato e con il grado di liquidità del mercato del capitale di rischio di una banca, il quale determina il tempo con il quale l'eventuale erosione di capitale conseguente alle perdite inattese può essere colmata da un aumento di capitale.

Le semplici considerazioni finora svolte, riportate in modo sintetico e schematico nella tavola 2.1.1, spingono ad adottare l'anno come orizzonte temporale di riferimento.

Tavola 2.1.1

**La scelta dell'orizzonte temporale**

<i>Finalità perseguita</i>	<i>Fattori rilevanti per la scelta dell'orizzonte temporale</i>	<i>Orizzonte temporale ideale</i>
Misurazione del rischio	⇒ Coerenza con l'orizzonte temporale adottato per la stima delle probabilità di insolvenza	⇒ 1 anno
Controllo del rischio (limiti)	⇒ Liquidità delle posizioni Tasso di rotazione media del portafoglio	⇒ Vita residua prestiti 1 anno
Misurazione delle RAP	⇒ Frequenza del processo di budgeting Frequenza rilevazione risultati economici	⇒ 1 anno 1 anno
Pricing	⇒ Scadenza dei prestiti Frequenza di revisione delle condizioni di tasso	⇒ Vita residua prestiti 1 anno o più
Allocazione del capitale	⇒ Frequenza della riallocazione periodica del capitale Liquidità del mercato del capitale di rischio	⇒ 1 anno 1 anno

**2.1.3 Matrici di transizione annuali e pluriennali**

Come illustrato nell'introduzione di questo manuale, un adeguato sistema di misurazione del rischio di credito di un portafoglio prestiti di una banca non dovrebbe limitarsi a considerare il solo rischio di insolvenza, secondo una logica *default-mode*, ma dovrebbe viceversa considerare anche il rischio di migrazione, ossia la possibilità che un affidato, pur non divenendo insolvente, veda deteriorarsi il proprio merito creditizio e conseguentemente aumentare la propria probabilità di insolvenza.

Un primo passo necessario per poter giungere a stimare la perdita inattesa di un'esposizione creditizia seguendo un approccio multinomiale che consideri anche il

<sup>3</sup> Si veda a questo proposito il capitolo 2.4 del presente manuale.

rischio di migrazione è quello di costruire matrici di transizione relative a diversi orizzonti temporali, sulla base delle quali stimare le probabilità di insolvenza dei soggetti affidati<sup>4</sup>. Si supponga di aver stimato, sulla base dell'esperienza storica dei tassi di insolvenza registrati dal proprio portafoglio, una matrice di transizione a un anno basata su un sistema interno di rating formato da dieci classi, di cui cinque rappresentano classi "sane" (*pass grades*), quattro classi problematiche (*problem-asset grades*) e una le controparti divenute insolventi (default), come quella illustrata nella tavola 2.1.2.<sup>5</sup>

Tavola 2.1.2

**Matrice di transizione a 1 anno**

Classe finale	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Default
Classe iniziale	Ecc.te	Ottimo	Buono	Discreto	Suff.	Rientro	Sotto Contr.lo	Pre-cont.so	Incaglio	Soff.za
1	85.00%	7.50%	3.50%	2.00%	1.00%	0.45%	0.25%	0.15%	0.10%	0.05%
2	6.00%	80.90%	5.25%	4.00%	2.00%	0.75%	0.50%	0.30%	0.20%	0.10%
3	4.00%	4.00%	78.30%	6.00%	3.00%	1.75%	1.40%	0.80%	0.45%	0.30%
4	2.50%	3.00%	4.05%	70.85%	7.00%	4.50%	3.00%	2.30%	1.80%	1.00%
5	1.25%	2.00%	3.50%	6.00%	66.4%	8.00%	5.00%	3.50%	2.50%	1.85%
6	0.70%	1.20%	2.25%	4.00%	7.50%	62.10%	8.50%	5.75%	4.50%	3.50%
7	0.25%	0.75%	1.50%	3.00%	5.00%	8.00%	57.75%	9.50%	7.75%	6.50%
8	0.15%	0.35%	0.85%	1.80%	3.50%	6.00%	9.50%	51.50%	17.35%	9.00%
9	0.10%	0.20%	0.50%	1.35%	2.75%	4.95%	7.60%	17.20%	44.35%	21.00%
Default	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.0%

La colonna relativa alla classe default presenta anche i tassi di insolvenza a un anno (marginali e cumulati in questo caso coincidono) delle diverse classi di rating. Così, ad esempio, il tasso di insolvenza a un anno relativo alla classe 3 è pari a 0,30%.

La costruzione di  
matrici di  
transizione  
pluriennali

Si supponga a questo punto di voler stimare il tasso di insolvenza a due anni della medesima classe 3. Quest'ultimo può essere calcolato come prodotto di due vettori, ossia del vettore riga relativo alla classe 3, il quale indica le probabilità di migrazione a un anno di un soggetto di classe 3 alle altre classi di rating, e del vettore colonna relativo alla classe default, il quale indica la probabilità con cui soggetti delle diverse classi di rating divengono insolventi nel corso di un anno. Esistono infatti dieci eventi diversi che conducono un soggetto di classe 3 all'insolvenza nel corso di due anni:

- (1) la migrazione a un anno nella classe 1 e la successiva insolvenza a un anno (probabilità 4% x 0,05%);
- (2) la migrazione a un anno nella classe 2 e la successiva insolvenza a un anno (probabilità 4% x 0,10%);
- (3) la permanenza in classe 3 e la successiva insolvenza a un anno (probabilità 78,3% x 0,3%);
- ...
- (10) l'insolvenza nel corso del primo anno e la successiva permanenza nella classe dell'insolvenza (probabilità 0,3% x 100%).

Trattandosi di dieci eventi incompatibili, la probabilità che si verifichi uno di essi è data dalla somma delle relative probabilità. Il risultato che si ottiene è pari a 0,98%. Generalizzando, la probabilità che un soggetto di classe  $j$  migri, nel corso di un periodo

<sup>4</sup> Una matrice di transizione non è altro che una tavola nella quale vengono riportate le frequenze con cui soggetti appartenenti alle diverse classi del sistema di rating internamente adottato dalla singola banca "migrano", ossia si muovono nel tempo, verso altre classi.

<sup>5</sup> Come si può notare, questo sistema risulta coerente con quanto illustrato nel capitolo 1.2 del presente manuale.

di due anni, alla classe  $y$ , si ottiene moltiplicando fra loro due vettori, rappresentati rispettivamente dalla riga della matrice di transizione a un anno relativa alla classe  $j$  e dalla colonna della matrice di transizione relativa alla classe  $i$ . Analiticamente:



$$(1) \quad {}_jMR_{y,2} = \sum_{i=1}^N {}_jMR_{y,1} \cdot {}_iMR_{y,1}$$

dove in generale  ${}_jMR_{y,k}$  rappresenta il tasso di migrazione (*migration rate*) di un soggetto di classe  $j$  alla classe  $y$  nel corso di un periodo di  $k$  anni ed  $N$  rappresenta il numero di classi di *rating*.

Per inciso, osserviamo che, se la classe di destinazione è l'ultima (il *default*), allora queste probabilità di migrazione coincidono con le probabilità di default introdotte nel capitolo 1.2. In simboli:

$${}_jMR_{N,t} \equiv p_{j,t}$$

da cui seguono (come descritto nel capitolo 1.2) le probabilità di default marginali ( $p'_{j,t}$ ) e medie ( $\bar{p}_{j,t}$ ).

Applicando la (1) al caso esaminato sopra si ottiene:

$${}_3MR_{10,2} = p_{3,2} = \sum_{i=1}^{10} {}_3MR_{i,1} \cdot {}_iMR_{10,1} = 0,98\%$$

Allo stesso modo è possibile calcolare le probabilità di insolvenza cumulate a due anni per i soggetti delle diverse classi di rating. Analiticamente, effettuando un semplice prodotto fra due matrici, entrambe rappresentate dalla matrice di transizione a un anno, si ottiene la matrice di transizione a due, nella quale è possibile leggere i tassi di insolvenza cumulati a due anni delle varie classi di rating.

Tavola 2.1.3

**Matrice di transizione a 2 anni**

Classe iniziale	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Default
Classe finale	Eccell.	Ottimo	Buono	Discreto	Suff.	Insuff.	Sotto Contr.	Pre-cont.	Incaglio	Sofferenza
1	72.91%	12.67%	6.24%	3.72%	1.96%	0.98%	0.61%	0.40%	0.29%	0.22%
2	10.30%	66.28%	8.83%	6.68%	3.54%	1.60%	1.11%	0.74%	0.53%	0.40%
3	6.98%	6.94%	62.08%	9.50%	5.12%	3.20%	2.52%	1.61%	1.07%	0.98%
4	4.37%	5.13%	6.71%	51.37%	10.43%	7.11%	5.02%	3.96%	3.11%	2.79%
5	2.38%	3.51%	5.75%	9.12%	45.71%	11.37%	7.65%	5.67%	4.25%	4.60%
6	1.42%	2.22%	3.87%	6.38%	10.77%	40.64%	11.61%	8.49%	6.72%	7.88%
7	0.68%	1.45%	2.68%	4.88%	7.63%	11.11%	35.89%	12.43%	10.11%	13.14%
8	0.43%	0.81%	1.69%	3.24%	5.69%	8.81%	12.45%	30.93%	17.76%	18.19%
9	0.31%	0.55%	1.15%	2.50%	4.51%	7.20%	10.00%	17.62%	23.56%	32.59%
Default	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%



Procedendo con il medesimo criterio è possibile ottenere, moltiplicando la matrice di transizione a 2 anni per quella a 1 anno, la matrice di transizione a 3 anni, contenente i tassi di insolvenza cumulati a 3 anni relativi alle diverse classi e analogamente le matrici di transizione relative a periodi ancora più lunghi. La tavola 2.1.4 riporta la matrice di transizione a dieci anni ottenuta dall'originale matrice di transizione a 1 anno.

Tavola 2.1.4

**Matrice di transizione a 10 anni**

Classe finale	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Default
Classe iniziale	Eccell.	Ottimo	Buono	Discreto	Suff.	Insuff.	Sotto Contr.	Pre-cont.	Incaglio	Sofferenza
1	29.16%	19.80%	13.35%	9.70%	6.70%	4.81%	3.82%	3.06%	2.39%	7.21%
2	17.70%	22.20%	13.99%	10.89%	7.82%	5.79%	4.69%	3.82%	2.99%	10.11%
3	13.48%	13.00%	17.14%	11.40%	8.70%	6.94%	5.77%	4.78%	3.75%	15.03%
4	9.33%	9.61%	10.10%	11.38%	9.39%	8.06%	6.87%	5.90%	4.69%	24.67%
5	7.08%	7.67%	8.73%	9.21%	9.59%	8.37%	7.24%	6.28%	5.00%	30.82%
6	5.41%	6.02%	7.13%	7.87%	8.32%	8.17%	7.18%	6.33%	5.06%	38.51%
7	4.13%	4.74%	5.81%	6.65%	7.21%	7.19%	6.70%	5.98%	4.80%	46.78%
8	3.25%	3.76%	4.75%	5.60%	6.26%	6.38%	6.01%	5.52%	4.43%	54.03%
9	2.54%	2.96%	3.74%	4.46%	5.01%	5.12%	4.83%	4.44%	3.57%	63.33%
Default	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

E' interessante osservare come la stabilità delle singole classi di merito si riduca sensibilmente al crescere dell'orizzonte temporale di riferimento e al tempo stesso la probabilità di insolvenza, molto bassa nel caso dell'orizzonte temporale annuo, divenga sensibilmente superiore per tutte le classi di *rating*.

Le ipotesi di un  
processo  
markoviano

E' bene a questo punto chiarire come l'approccio fin qui seguito per la stima delle matrici di transizione pluriennali sia subordinato all'ipotesi di stabilità dei tassi di migrazione. Più in generale, la possibilità di utilizzare i dati storici relativi alle frequenze con le quali i soggetti appartenenti alle diverse classi di merito creditizio restano nella propria classe o migrano verso altre classi, è subordinata alla possibilità di utilizzare le regole matematiche proprie di un processo markoviano, come quello implicito nel fenomeno della migrazione. Tale possibilità è a sua volta subordinata ad alcune condizioni relative alle probabilità di migrazione. Più in particolare, occorre che la probabilità con cui un soggetto si muove da una classe a un'altra sia:

- ✓ indipendente dalla propria storia passata, ossia indipendente dal fatto che in passato abbia subito *upgrading* o *downgrading*;
- ✓ temporalmente stazionaria, ossia costante<sup>6</sup>;
- ✓ la stessa per tutti i soggetti classificati in una certa classe.

Per quanto apparentemente restrittive, le condizioni menzionate rappresentano anche gli obiettivi cui un sistema interno di *rating* dovrebbe mirare. In altri termini, se si riconoscesse, ad esempio, che la prima condizione non è rispettata, ossia che la probabilità che una controparte subisca un declassamento è funzione del fatto che nel periodo precedente sia già stata o meno declassata, implicitamente verrebbe negata la bontà del modo in cui è stato attribuito il *rating* nel periodo precedente. La migrazione verso altre classi di *rating* è infatti da attribuire al sopraggiungere di nuove informazioni precedentemente non disponibili. In altri termini, se l'attribuzione di una controparte a una certa classe di merito avviene sulla base di tutte le informazioni al momento disponibili, non vi è motivo di ritenere che due soggetti inseriti all'interno della medesima classe debbano avere una diversa probabilità di migrare verso altre classi<sup>7</sup>.

<sup>6</sup> Nel capitolo 1.2 del presente manuale si era osservato come i tassi di insolvenza relativi alle imprese dei diversi settori produttivi italiani non siano stabili nel tempo ma subiscano delle variazioni le quali sono a loro volta funzione dell'andamento del ciclo economico. Questa instabilità non è tuttavia in contrasto con l'ipotesi di costanza di cui si parla in questa sede, dove si fa riferimento alle probabilità di migrazione relative a soggetti di una medesima classe di merito creditizio. E' infatti evidente che le variazioni del ciclo economico comportano normalmente anche spostamenti di classi di *rating* e fanno sì che le imprese di un certo settore produttivo modifichino anche il proprio merito creditizio.

<sup>7</sup> L'evidenza empirica ricavabile dalle matrici di transizione prodotte periodicamente dalle agenzie internazionali (Standard&Poor's e Moody's) mostra in realtà instabilità dei tassi di insolvenza e dipendenza

## 2.1.4 La stima del tasso di perdita attesa

Sulla base dei dati relativi ai tassi di insolvenza marginali, cumulati e medi<sup>8</sup> e dei tassi di perdita in caso di insolvenza (LGD) è a questo punto possibile stimare i tassi di perdita attesa relativi alle diverse classi di rating per le diverse scadenze<sup>9</sup>. Gli input necessari sono fondamentalmente due: la matrice di transizione a un anno e i tassi di perdita in caso di insolvenza. Analiticamente:

$$(2) \quad MLR_{i,t} = p'_{i,t} \cdot LGD$$

$$(3) \quad CLR_{i,t} = p_{i,t} \cdot LGD$$

$$(4) \quad ALR_{i,t} = \bar{p}_{i,t} \cdot LGD$$

dove  $MLR_{i,t}$ ,  $CLR_{i,t}$  e  $ALR_{i,t}$  rappresentano rispettivamente i tassi di perdita marginali, cumulati e medi annui (*marginal, cumulative e average annual loss rates*) di esposizioni di classe  $i$  relativi all'anno  $t$ .

Basandosi sui dati della matrice di transizione a un anno riportata nella tavola 2.1.2 e su un tasso di perdita in caso di insolvenza pari al 50%, le tabelle 2.1.5 e 2.1.6 riportano i tassi di perdita cumulati e medi per classe di rating e per scadenza.

Tavola 2.1.5

### Tassi di perdita cumulati per scadenza e classe di rating

	Classe di rating	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Default
Scadenza											
1		0.02%	0.05%	0.15%	0.50%	0.92%	1.75%	3.25%	4.50%	10.50%	50.00%
2		0.11%	0.20%	0.49%	1.40%	2.30%	3.94%	6.57%	9.10%	16.30%	50.00%
3		0.26%	0.47%	1.00%	2.56%	3.93%	6.25%	9.65%	12.98%	20.07%	50.00%
4		0.50%	0.85%	1.68%	3.88%	5.67%	8.53%	12.41%	16.15%	22.83%	50.00%
5		0.82%	1.35%	2.47%	5.29%	7.44%	10.69%	14.83%	18.76%	24.98%	50.00%
6		1.23%	1.94%	3.37%	6.74%	9.19%	12.70%	16.97%	20.93%	26.75%	50.00%
7		1.72%	2.62%	4.34%	8.18%	10.87%	14.55%	18.86%	22.77%	28.25%	50.00%
8		2.28%	3.37%	5.37%	9.61%	12.47%	16.25%	20.53%	24.37%	29.54%	50.00%
9		2.91%	4.19%	6.43%	11.00%	13.98%	17.82%	22.04%	25.77%	30.66%	50.00%
10		3.61%	5.05%	7.51%	12.34%	15.41%	19.25%	23.39%	27.02%	31.66%	50.00%

seriale nelle migrazioni, nel senso che un soggetto che ha subito un *downgrading* (*upgrading*) presenta una maggiore probabilità, a parità di classe di rating, di subire un ulteriore *downgrading* (*upgrading*) di quella di un soggetto che era già nella stessa classe il periodo precedente. La mancata verifica dell'ipotesi di indipendenza seriale è verosimilmente il riflesso di due fenomeni: i) da un lato il ritardo con cui normalmente avviene una modifica del rating di un emittente da parte delle agenzie; ii) dall'altro la bassissima frequenza con cui il rating di una controparte viene variato di più di una classe. I due fenomeni combinati fra loro fanno sì che una variazione di una sola classe realizzata in ritardo possa essere seguita a breve tempo da una successiva modifica nella medesima direzione. La mancata verifica della condizione di stabilità dei tassi di insolvenza può invece essere interpretata alla luce delle modalità di attribuzione del rating seguite dalle grandi agenzie internazionali (per maggiori dettagli, cfr. Sironi, 2000).

<sup>8</sup> Si veda a questo proposito il capitolo 1.2 del presente manuale.

<sup>9</sup> L'ipotesi sottostante alla stima dei tassi di perdita cumulati è quella di un finanziamento "zero-coupon", che prevede il pagamento degli interessi e il rimborso del capitale in unica soluzione a scadenza. Nel caso di un prestito "bullet", che paga interessi periodici ma prevede il rimborso del capitale in unica soluzione a scadenza, il tasso di perdita cumulato calcolato con la (3) è ancora adeguato se ci si trova in presenza di una curva dei tassi di insolvenza marginali piatta. Viceversa, la (3) deve essere corretta in caso di un prestito caratterizzato da un piano di ammortamento che prevede il rimborso del capitale durante la vita del prestito stesso. In questo caso, infatti, i tassi di insolvenza marginali relativi agli anni più distanti si applicano unicamente alle quote di capitale rimborsate alla fine della vita del prestito.

Tavola 2.1.6

**Tassi di perdita medi annui per scadenza e classe di rating**

Classe di rating	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Default
Scadenza										
1	0.02%	0.05%	0.15%	0.50%	0.92%	1.75%	3.25%	4.50%	10.50%	50.00%
2	0.05%	0.10%	0.24%	0.70%	1.15%	1.97%	3.29%	4.55%	8.21%	50.00%
3	0.09%	0.16%	0.33%	0.85%	1.31%	2.08%	3.22%	4.33%	6.78%	50.00%
4	0.13%	0.21%	0.42%	0.97%	1.42%	2.13%	3.10%	4.04%	5.81%	50.00%
5	0.17%	0.27%	0.50%	1.06%	1.49%	2.14%	2.97%	3.76%	5.10%	50.00%
6	0.21%	0.32%	0.56%	1.12%	1.53%	2.12%	2.83%	3.50%	4.56%	50.00%
7	0.25%	0.37%	0.62%	1.17%	1.55%	2.08%	2.70%	3.26%	4.14%	50.00%
8	0.29%	0.42%	0.67%	1.20%	1.56%	2.03%	2.57%	3.06%	3.79%	50.00%
9	0.32%	0.47%	0.72%	1.22%	1.55%	1.98%	2.45%	2.88%	3.50%	50.00%
10	0.36%	0.51%	0.75%	1.23%	1.54%	1.93%	2.34%	2.72%	3.26%	50.00%

I tassi di perdita medi annui presentano un'applicazione diretta. Essi rappresentano infatti da un lato la quota dell'esposizione che deve trovare copertura esplicita in un accantonamento a fondo rischi su crediti (o, alternativamente, in una rettifica della relativa posta attiva), dall'altro lo spread da applicare al tasso praticato alla controparte per compensare la componente "attesa" del rischio di credito.

### 2.1.5 La stima della perdita inattesa

L'approccio più semplice per la determinazione del tasso di perdita inattesa, ossia della variabilità del tasso di perdita, si basa sull'ipotesi che l'unico evento "sfavorevole" che può accadere nell'arco dell'orizzonte temporale prescelto (un anno) sia rappresentato dall'insolvenza della controparte affidata. Tale approccio, illustrato nel capitolo 1.5 del presente manuale, aveva consentito di concludere che il tasso di perdita inattesa associato a un'esposizione creditizia potesse essere misurata sulla base della volatilità (deviazione standard) della distribuzione binomiale. Analiticamente:

Il modello binomiale

$$(5) \quad ULR = \sqrt{p \cdot (1-p)(LGD)^2 + p \cdot s_{LGD}^2}$$

dove ULR rappresenta il tasso di perdita inattesa (*unexpected loss rate*). L'approccio binomiale illustrato in quella sede ha il vantaggio della semplicità concettuale e informativa. Sono infatti sufficienti i due dati relativi alla probabilità di insolvenza, ricavabile sulla base della stima dei tassi storici degli affidati della medesima classe di merito creditizio, al tasso di recupero e alla sua variabilità per ottenere una stima del tasso di perdita inattesa. A fronte di questo vantaggio, l'approccio descritto soffre dello svantaggio di non considerare le possibili migrazioni fra classi di merito creditizio. Trattandosi di un modello che parte dall'assunto che i possibili stati sono solo due (insolvenza e non insolvenza), pur consentendo di cogliere la diversa condizione di partenza di due affidati che, entrambi non insolventi, si caratterizzano per un diverso merito creditizio e dunque per una diversa probabilità di insolvenza, esso non consente di cogliere, per il medesimo soggetto, il rischio di un deterioramento del merito creditizio. Da questo punto di vista, infatti, l'approccio binomiale, trascurando le potenziali variazioni del merito creditizio e concentrandosi sul solo rischio di insolvenza, non considera in alcun modo l'eventuale deterioramento che un affidato, ancora solvibile alla fine dell'anno, può subire.

Per chiarire meglio questo punto, si consideri un impiego con scadenza pari a un anno. In questo caso l'utilizzo di un approccio binomiale conduce a risultati teoricamente analoghi a quelli di un approccio multinomiale, caratterizzato cioè da più stati di non

insolvenza. Se infatti l'orizzonte di misurazione del rischio è pari a un anno, l'eventualità di un deterioramento del merito creditizio assume scarsa rilevanza: o l'affidato alla fine dell'anno è ancora solvibile, e dunque rimborserà il suo debito indipendentemente dalla sua classe di merito, o non lo è più, e allora la perdita sarà data dal complemento a uno del tasso di recupero. In questo senso per le esposizioni con vita residua pari o inferiore all'anno il problema del rischio di migrazione non si pone. Se invece la vita residua dell'impiego è superiore all'anno, il fatto di trascurare il rischio di migrazione diventa un fenomeno importante che non può essere trascurato. Che si adotti o meno una logica a valori di mercato, rimane il fatto che il merito creditizio dell'affidato può deteriorarsi e questo potenziale deterioramento deve essere preso in considerazione nel misurare il rischio dell'impiego in esame. In conclusione, il modello binomiale può essere adottato per la stima della perdita inattesa relativa alle esposizioni con scadenza pari o inferiore all'anno.

Nel caso invece di esposizioni con scadenza superiore all'anno occorre inevitabilmente considerare che, nel corso di un orizzonte temporale annuo, oltre all'insolvenza può anche verificarsi una migrazione verso altri "stati", rappresentati dalle altre classi di rating. La stima della perdita inattesa, ossia della variabilità del tasso di perdita, deve dunque fondarsi su una distribuzione non più binomiale ma multinomiale, approssimata da una distribuzione discreta di N classi di rating dove le probabilità associate agli N stati sono rappresentate dai tassi di migrazione della matrice di transizione a un anno.

Dal modello binomiale a quello multinomiale

Se dunque la matrice di transizione a un anno fornisce le probabilità che nel corso di un anno la controparte affidata finisca in uno degli N stati (per ipotesi 10) dei quali uno solo rappresenta l'insolvenza, occorre chiarire quali sono gli "eventi" associati a ognuno di questi stati. Nel caso della distribuzione binomiale, infatti, l'evento associato alla migrazione verso lo stato di insolvenza era rappresentato da una perdita pari a LGD. Nel caso di migrazione verso uno stato diverso dall'insolvenza l'evento è configurabile come una variazione del tasso di perdita cumulato. In altri termini, si consideri un impiego a dieci anni di classe 3. La matrice di transizione a un anno riportata nella tavola 2.1.2 indica che la probabilità di una migrazione verso la classe 4 è pari al 6%. Se questo evento si manifestasse si registrerebbe un incremento nel tasso di perdita cumulato, ossia un aumento, rispetto a quanto era verosimile attendersi, nella quota di riserve che la banca deve complessivamente accantonare durante la vita del prestito. In particolare, se la controparte si trova all'inizio del periodo in classe 3, il valore atteso a un anno relativo alla perdita cumulata può essere ottenuto come media, ponderata per le relative probabilità di migrazione a un anno, delle perdite attese cumulate delle diverse classi di rating a un anno di distanza, ossia come somma di:

- (1) la probabilità di migrare alla classe 1 (4%) per la perdita attesa cumulata a 9 anni relativa alla classe 1 (2,91%);
- (2) la probabilità di migrare alla classe 2 (4%) per la perdita attesa cumulata a 9 anni relativa alla classe 2 (4,19%);
- (3) la probabilità di restare nella classe 3 (78,3%) per la perdita attesa cumulata a 9 anni relativa alla classe 3 (6,43%);
- .....
- (10) la probabilità di migrare alla classe 10, ossia di andare in default (0,3%) per la perdita attesa cumulata relativa alla classe default (50%)

Analiticamente, ciò equivale a:

$$(6) \quad ECLR_{j,t-1} = \sum_{i=1}^N MR_{i,1} \cdot CLR_{i,t-1}$$

dove  $ECLR_{j,t-1}$  rappresenta il valore atteso del tasso di perdita cumulato di un credito  $j$  in  $t-1$ , ossia a un anno di distanza. E' peraltro possibile dimostrare che questo valore coincide con  $CLR_{i,t}$ .

Nel caso sotto esame:

$$ECLR_{3,9} = \sum_{i=1}^N {}_3MR_{i,1} \cdot CLR_{i,9} = 7,51\%$$

Noto questo valore "atteso" del tasso di perdita cumulato a un anno di distanza, per poter stimare la perdita inattesa occorre valutare la probabilità e il relativo impatto di variazioni del merito creditizio del soggetto affidato. Ad esempio, se la controparte subisce, nel corso dell'orizzonte temporale prescelto pari a un anno, un deterioramento e migra alla classe 4, il tasso di perdita cumulato atteso sale all'11%. Ne segue che l'evento è configurabile come un aumento del tasso di perdita pari al 3,49%. In altri termini, la banca, per effetto del declassamento, è costretta a effettuare, durante la vita del prestito, ulteriori accantonamenti per un valore complessivo pari a 3,49% del valore dell'ammontare del finanziamento concesso.

Così come per il caso di una migrazione dalla classe 3 alla classe 4, è possibile calcolare gli "eventi" associati a ogni singola possibile migrazione e associare a questo modo alle probabilità derivanti dalla matrice di transizione a un anno anche i singoli eventi. Questi ultimi sono peraltro configurabili come "scarti" rispetto a un valore "previsto" o "maggiormente probabile", quest'ultimo rappresentato dal tasso di perdita attesa cumulato relativo alla classe di rating iniziale. Noti gli scarti dal valore atteso e le relative probabilità è possibile stimare la perdita inattesa come deviazione standard. Analiticamente:

$$(7) \quad ULR_{j,t} = \sqrt{\sum_{i=1}^N {}_jMR_{i,1} \cdot (CLR_{i,t-1} - ECLR_{j,t-1})^2}$$

dove  $ULR_{j,t}$  rappresenta il tasso di perdita inattesa relativo a un impiego di classe  $j$  con vita residua pari a  $t$ . Utilizzando i dati relativi ai tassi di migrazione della tavola 2.1.2 e i tassi di perdita cumulati della tavola 2.1.5, è possibile stimare il tasso di perdita inatteso relativo a un impiego di classe 3 con scadenza pari a dieci anni e tasso di perdita in caso di insolvenza ( $LGD$ ) pari al 50%: esso risulta pari a 6,17%.

$$ULR_{3,10} = \sqrt{\sum_{i=1}^N {}_3MR_{i,1} \cdot (CLR_{i,9} - ECLR_{3,9})^2} = 6,17\%$$

Come si può agevolmente osservare, la (7) rappresenta la deviazione standard annua del tasso di perdita cumulato, anche se caratterizzata dalla peculiarità che la variabilità è stimata attorno a un valore atteso delle perdite che si riferisce all'inizio dell'anno successivo rispetto a quello in cui viene effettuata la valutazione<sup>10</sup>. Tale scelta, oltre a risultare una naturale conseguenza dell'adozione di un orizzonte temporale annuo, è peraltro coerente con il fatto che ciò che si intende stimare è la perdita inattesa, cui contribuiscono per definizione eventi non attesi dalla banca. Tale non è evidentemente il passaggio del tempo!

<sup>10</sup> Il fatto che si tratti di un valore atteso a un anno non crea peraltro problemi da un punto di vista statistico in quanto  $ECLR_{j,t-1}$  coincide con  $CLR_i$  e dunque la deviazione standard del tasso di perdita è comunque stimata attorno al valore medio corrente.

La (7) si basa in realtà sull'ipotesi di un tasso di perdita in caso di insolvenza costante e dunque trascura la componente di rischio connessa a una potenziale riduzione del tasso di recupero. Per tenere adeguatamente in considerazione questa seconda componente di rischio, occorre correggere la (7) per considerare che la perdita attesa associata ad ogni singola classe di *rating* può in realtà risultare superiore a quanto stimato per effetto della volatilità del tasso di recupero. Analiticamente<sup>11</sup>:



$$(8) ULR_{j,t} = \sqrt{\sum_{i=1}^N MR_{i,1} \cdot (CLR_{i,t-1} - ECLR_{j,t-1})^2 + p_{j,t}^2 \cdot s_{LGD}^2 + \sum_{i=1}^N MR_{i,1} \cdot (p_{i,t-1} - ECDR_{j,t-1})^2 \cdot s_{LGD}^2}$$

$$\text{dove } ECDR_{j,t-1} = \sum_{i=1}^N MR_{i,1} \cdot p_{i,t-1} \text{ (expected cumulative default rate).}$$

Utilizzando i dati relativi ai tassi di migrazione della tavola 2.1.2 e i tassi di perdita della tavola 2.1.7, è possibile stimare il tasso di perdita inatteso relativo a un impiego di classe 3 con scadenza pari a dieci anni, tasso di perdita in caso di insolvenza pari al 50% e variabilità di quest'ultimo pari al 20%: esso risulta pari a

Analiticamente:

$$ULR_{3,10} = \sqrt{\sum_{i=1}^N MR_{i,1} \cdot (CLR_{i,9} - ECLR_{3,9})^2 + p_{3,9}^2 \cdot s_{LGD}^2 + \sum_{i=1}^N MR_{i,1} \cdot (p_{i,9} - ECDR_{3,9})^2 \cdot s_{LGD}^2} = 8,90\%$$

E' facile osservare come, lungi dal risultare ininfluenza, la componente di rischio associata alla potenziale variazione del tasso di recupero incide in misura rilevante sul rischio complessivo dell'impiego in esame, il quale passa dal 6,17% al 8,90%. Si osserva inoltre come, rispetto a quanto esaminato con riferimento all'approccio binomiale, adottando un approccio multinomiale basato su un sistema di classi di *rating*, si arriva a considerare come perdita inattesa anche il semplice declassamento dell'impresa affidata, senza dunque concentrarsi sul solo evento insolvenza.

La tavola 2.1.7 riporta i dati relativi ai tassi di perdita inattesa per classi di rating e per scadenza stimati sulla base dei dati riportati nelle tabelle 2.1.2 e 2.1.6 e di un tasso di perdita in caso di insolvenza pari al 50% e di una relativa volatilità pari al 20%.

<sup>11</sup> Ricordando la formula relativa alla varianza di una variabile ottenuta come prodotto di due variabili casuali indipendenti (in questo caso il default e la loss given default) si nota come: il primo addendo sotto radice rappresenta il prodotto della varianza del default (misurato, in questo caso, su un orizzonte temporale di *t-1* anni) per la media al quadrato di LGD; il secondo rappresenta il prodotto della varianza di LGD per la media di *p* al quadrato; il terzo rappresenta il prodotto delle due varianze.

Tavola 2.1.7

**Tassi di perdita inattesa per scadenza e classe di rating**

Classe di rating	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Scadenza									
1	1,20%	1,70%	2,95%	5,36%	7,27%	9,92%	13,34%	15,52%	22,33%
2	1,29%	1,83%	3,12%	5,70%	7,66%	10,50%	14,24%	16,94%	25,17%
3	1,49%	2,11%	3,51%	6,35%	8,42%	11,47%	15,45%	18,59%	26,55%
4	1,76%	2,48%	4,03%	7,19%	9,43%	12,73%	16,94%	20,41%	27,91%
5	2,10%	2,93%	4,66%	8,18%	10,61%	14,13%	18,50%	22,14%	29,14%
6	2,48%	3,46%	5,38%	9,27%	11,89%	15,58%	20,01%	23,72%	30,24%
7	2,93%	4,07%	6,18%	10,42%	13,20%	17,00%	21,43%	25,13%	31,23%
8	3,44%	4,73%	7,05%	11,59%	14,50%	18,37%	22,76%	26,40%	32,13%
9	4,01%	5,45%	7,96%	12,76%	15,77%	19,67%	23,98%	27,55%	32,94%
10	4,63%	6,22%	8,90%	13,92%	17,00%	20,89%	25,10%	28,58%	33,68%

**2.1.6 Dalla perdita inattesa al VaR**

Per passare dalla stima della perdita inattesa a quella del capitale a rischio occorre poter associare alla misura di rischio un livello di confidenza. Occorre cioè determinare, invece che una semplice variabilità del tasso di perdita, il valore del tasso di perdita associato al livello di confidenza prescelto dalla banca. Se la misura di rischio dovesse incorporare l'intera gamma possibile degli eventi, ossia un livello di confidenza del 100%, è verosimile che il risultato sarebbe talmente elevato da non consentire in alcun modo una dotazione patrimoniale sufficiente. Viceversa, se il livello di confidenza prescelto fosse del 50% e la banca si dotasse di una quantità di patrimonio coerente con tale livello, vi sarebbe una probabilità troppo elevata (50%) per la banca di subire perdite superiori al proprio capitale economico e dunque di divenire insolvente.

Questa scelta rappresenta un passo al tempo stesso concettualmente semplice e tecnicamente rilevante. Concettualmente semplice perché il livello di confidenza deve risultare uniforme per tutte le aree di attività e dunque per tutte le tipologie di rischio, della banca. In questo senso, la determinazione di tale parametro deve avvenire al di fuori dell'area credito, per la quale il livello di confidenza rappresenta dunque un fattore esogeno. Tecnicamente rilevante perché, a differenza di quanto accade per i rischi di mercato, dove il livello di confidenza rappresenta generalmente un semplice fattore scalare<sup>12</sup>, per il rischio di credito diversi livelli di confidenza possono produrre risultati di VaR fra loro significativamente differenti.

Il problema della distribuzione non normale

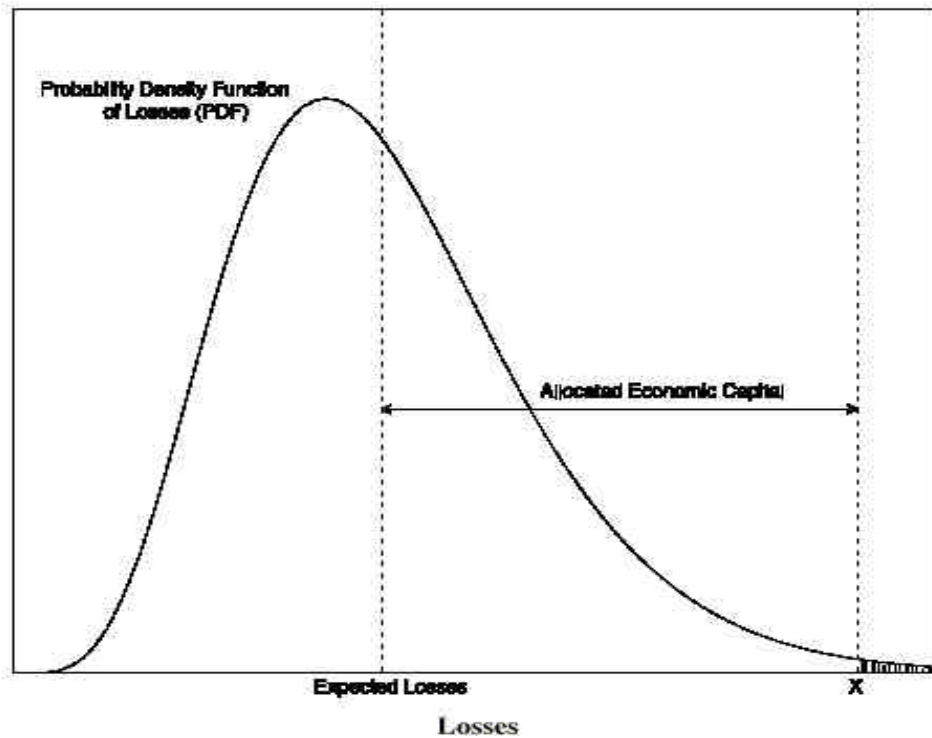
Diversamente da quanto accade per i modelli relativi ai rischi di mercato, i quali si fondano generalmente su un'ipotesi di distribuzione normale a media nulla dei rendimenti dei fattori di mercato, nel caso del rischio di credito si hanno infatti due importanti complicazioni:

- ✓ la media della distribuzione è in questo caso maggiore di zero: questa differenza è peraltro in parte il riflesso di un diverso orizzonte temporale lungo il quale viene stimata la perdita potenziale, che per i rischi di mercato connessi al portafoglio di *trading* è generalmente assunto giornaliero e per il rischio di credito è naturalmente più lungo data la minore liquidità dei relativi *assets*;
- ✓ la distribuzione dei tassi di perdita non è approssimabile dalla distribuzione normale in quanto fortemente asimmetrica. Come noto, l'ipotesi di normalità della distribuzione delle perdite implica che la probabilità che la perdita risulti superiore di un certo ammontare rispetto alla perdita attesa sia uguale alla probabilità che la

<sup>12</sup> Ci si riferisce al caso in cui i rischi di mercato vengono misurati mediante l'approccio varianze-covarianze subordinatamente all'ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato. Cfr. Sironi (1997).

perdita risulti inferiore dello stesso ammontare rispetto alla perdita attesa: tale proprietà non è invece riscontrabile con riferimento alla distribuzione delle perdite di un'esposizione creditizia<sup>13</sup>. Graficamente, tale fenomeno viene illustrato dalla figura 2.1.1.

Figura 2.1.1  
La distribuzione di probabilità delle perdite



Fonte: Federal Reserve (1998).

La non normalità della distribuzione dei tassi di perdita impedisce di ottenere la misura di VaR corrispondente al livello di confidenza desiderato semplicemente moltiplicando la volatilità del tasso di perdita per un fattore scalare. Le soluzioni a questo problema sono principalmente due.

- ✓ Una prima soluzione è quella che prevede di non formulare alcuna ipotesi circa la forma funzionale della distribuzione di probabilità delle perdite e di limitarsi a tagliare quest'ultima in corrispondenza del livello di confidenza desiderato, seguendo così la logica del percentile accennata sopra. In questo senso, la natura asimmetrica della distribuzione delle perdite, pur non consentendo di associare a un determinato multiplo della volatilità del tasso di perdita un certo intervallo di confidenza, non impedisce tuttavia di utilizzare l'evoluzione passata dei tassi di perdita per stimare la variabilità futura degli stessi. Considerando ad esempio la funzione di ripartizione delle perdite passate degli impieghi di una certa classe di *rating* è possibile stimare la perdita non attesa sulla base della deviazione massima possibile rispetto al valore medio e isolare in questo modo il "percentile" di perdita

<sup>13</sup> Tale asimmetria può essere colta anche a livello intuitivo se si pensa che il tasso di perdita connesso a un portafoglio di impieghi non può scendere al di sotto dello zero mentre può raggiungere livelli molto elevati rispetto al valore atteso. Ne segue che, se la perdita attesa fosse per ipotesi pari all'1%, la probabilità che si verifichi una perdita superiore al 2% (1% superiore alla media) è in realtà superiore alla probabilità che la perdita risulti inferiore allo 0% (1% inferiore alla media). Ciò in quanto mentre una perdita superiore a 2%, per quanto improbabile, risulta comunque possibile, una perdita inferiore allo 0% non ha alcuna probabilità di manifestarsi.

più elevata corrispondente all'intervallo di confidenza prescelto. Così, ad esempio, se l'obiettivo è quello di individuare la deviazione dalla perdita attesa corrispondente a un intervallo di confidenza del 99%, si utilizzerà come stima di tale deviazione quella cui corrispondono perdite ancora maggiori unicamente nell'1% dei casi<sup>14</sup>.

- ✓ Una seconda soluzione, adottata dall'approccio descritto nel seguito di questo capitolo, prevede di utilizzare comunque la stima della perdita inattesa, espressione della variabilità del tasso di perdita attorno al proprio valore atteso, e di ipotizzare una forma funzionale della distribuzione di probabilità diversa da quella normale, come la distribuzione beta<sup>15</sup>. Questa distribuzione ha infatti forma asimmetrica e un grado di asimmetria a destra tanto maggiore quanto minore è il suo valore medio. Si ottiene in questo modo un fattore moltiplicativo della perdita inattesa (*capital multiplier*) più pronunciato per le esposizioni nei confronti di soggetti caratterizzati da un merito creditizio migliore. La correttezza di questo risultato può essere adeguatamente compresa se si considera che il grado di asimmetria della distribuzione dei tassi di insolvenza, e dunque dei tassi di perdita, è molto più pronunciato per i portafogli di esposizioni nei confronti di soggetti caratterizzati da un ottimo merito creditizio. Questi ultimi, infatti, presentano una bassissima probabilità di subire perdite elevate e un'elevata probabilità di tassi di perdita prossimi allo zero. Viceversa, nel caso delle esposizioni nei confronti dei soggetti con merito creditizio peggiore la distribuzione di probabilità dei tassi di perdita tende verso una normale, per cui il grado di asimmetria, e dunque la correzione necessaria, si riduce significativamente<sup>16</sup>.

L'utilizzo della  
distribuzione  
beta

Utilizzando dunque come media ( $m$ ) la perdita cumulata corrispondente alla classe di rating e alla scadenza della singola esposizione ( $EL_{j,t}$ ) e come deviazione standard ( $s$ ) il relativo tasso di perdita inattesa ( $UL_{j,t}$ ), è possibile determinare il capitale a rischio come inversa della funzione beta corrispondente al livello di confidenza desiderato. La tavola 2.1.8 riporta i valori di capitale a rischio al 99% di confidenza, espressi in percentuale del valore dell'esposizione, ottenuti dalla distribuzione beta utilizzando come input i dati relativi ai tassi di perdita attesa cumulata della tavola 2.1.5 e quelli di perdita inattesa della tavola 2.1.7. I valori riportati nella tavola 2.1.8 sono stati ottenuti calcolando dapprima i *capital multiplier* medi per classe di rating, questi ultimi a loro

<sup>14</sup>Una soluzione alternativa all'utilizzo dei dati storici si basa sull'utilizzo delle tecniche di simulazione. Utilizzando un modello di simulazione Monte Carlo è infatti possibile costruire diversi scenari alternativi di evoluzione del valore di mercato delle attività dell'impresa finanziata e, in questo modo, ricostruire indirettamente una distribuzione di probabilità delle perdite connesse all'attività di impiego.

<sup>15</sup>La distribuzione beta è definita da due parametri, alfa e beta, entrambi maggiori di zero, che controllano rispettivamente l'inclinazione della "gobba" e lo "spessore" della coda della distribuzione. Dal nostro punto di vista l'inclinazione della gobba rappresenta la concentrazione, in termini di probabilità, della distribuzione dei tassi di perdita in prossimità di quello medio; viceversa, lo spessore della coda rappresenta la probabilità di ottenere tassi di perdita significativamente più elevati di quello atteso. I due parametri della distribuzione beta possono essere ottenuti sulla base dei valori di media e deviazione standard. Infatti, essendo:

$$m = \frac{a}{a+b}; \quad s^2 = \frac{a \cdot b}{(a+b)^2 \cdot (a+b+1)}$$

$$\text{si ottiene che } a = \frac{m(m-m^2-s^2)}{s^2}; \quad b = \frac{(1-m) \cdot m^2 - (m \cdot s^2)}{s^2(1-m)}$$

E' bene precisare che l'assunzione, che la distribuzione dei tassi di perdita sia approssimabile da una beta rappresenta soltanto un'ipotesi di lavoro, necessaria per poter utilizzare una forma funzionale facilmente parametrizzabile.

<sup>16</sup> Per una verifica empirica indiretta di tale fenomeno, basata sull'osservazione delle distribuzioni degli *spread* legati alle diverse classi di *rating*, si veda Foss (1992).

volta calcolati come rapporto fra valore a rischio e perdita inattesa<sup>17</sup>, e successivamente utilizzando tali valori medi per stimare il capitale a rischio relativo alle esposizioni di diversa scadenza ma della medesima classe di rating.

Tavola 2.1.8

**Capitale a rischio per scadenza e classe di rating**



Classe di rating	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Scadenza									
1	5,17%	7,22%	12,18%	20,83%	27,03%	34,66%	42,68%	45,02%	52,85%
2	5,56%	7,76%	12,91%	22,13%	28,50%	36,67%	45,58%	49,14%	59,58%
3	6,41%	8,93%	14,50%	24,65%	31,30%	40,05%	49,45%	53,93%	62,83%
4	7,57%	10,51%	16,66%	27,94%	35,08%	44,46%	54,21%	59,21%	66,04%
5	9,00%	12,44%	19,27%	31,79%	39,48%	49,37%	59,18%	64,25%	68,96%
6	10,67%	14,69%	22,27%	36,01%	44,22%	54,42%	64,02%	68,83%	71,57%
7	12,59%	17,24%	25,58%	40,47%	49,09%	59,40%	68,58%	72,93%	73,91%
8	14,77%	20,06%	29,15%	45,02%	53,94%	64,18%	72,81%	76,62%	76,03%
9	17,20%	23,12%	32,92%	49,58%	58,67%	68,71%	76,72%	79,94%	77,95%
10	19,87%	26,39%	36,82%	54,07%	63,24%	72,98%	80,32%	82,94%	79,71%

Si osserva come il passaggio dalla classe 8 alla classe 9 per alcune scadenze prolungate (8, 9 e 10 anni) conduce, a parità di altre condizioni, a una misura di capitale a rischio superiore. Il fenomeno è da imputarsi al fatto che il capitale a rischio è misurato come differenza fra valore del tasso di perdita che “isola” il percentile corrispondente al livello di confidenza prescelto e valore medio del tasso di perdita. Quest’ultimo subisce, passando dalla classe 8 alla classe 9 in corrispondenza delle scadenze più prolungate, incrementi particolarmente significativi capaci di più che compensare l’aumento del tasso di perdita corrispondente al 99° percentile.

**2.1.7 La stima del VaR di portafoglio e diversificato**

L’ultima fase è quella che prevede di passare dal VaR “individuale” di un’esposizione creditizia, stimato sulla base dei passaggi illustrati sopra, al VaR dell’intero portafoglio e, successivamente, al VaR “diversificato” delle singole posizioni (inteso quest’ultimo come contributo che ogni esposizione apporta al rischio del portafoglio della banca). Iniziamo quindi chiarendo come si possa passare dal VaR individuale al VaR del portafoglio prestiti complessivo.

A questo scopo occorre anzitutto chiarire quali sono i fattori “sistematici” di rischio e, conseguentemente, i “driver” della diversificazione del portafoglio impieghi della banca. Come verrà più approfonditamente illustrato nel capitolo 2.2, questi possono essere identificati nei settori produttivi nei quali operano le controparti affidate e nelle relative aree geografiche. Spingendosi oltre, si potrebbero considerare anche i fattori macroeconomici (crescita reale del PIL, variazioni dei tassi di interesse, variazioni del tasso di cambio effettivo reale, ecc.) che in misura maggiore spiegano l’evoluzione del merito di credito delle imprese, ma nell’approccio semplificato qui descritto si ipotizza di soffermarsi ai cluster geo-settoriali, ossia a incroci di settori produttivi e aree

<sup>17</sup> Il *capital multiplier* è ottenuto come rapporto fra valore a rischio, ottenuto sulla base dell’inversa della distribuzione beta, e perdita inattesa, e rappresenta dunque il rapporto fra valore sull’asse delle ascisse che isola l’1% di probabilità e la deviazione standard. Se si utilizzasse una distribuzione normale anziché una distribuzione beta, il *capital multiplier* relativo al 99% di confidenza sarebbe pari a 2,326. Utilizzando invece una beta il valore del *capital multiplier* varia in funzione della media e della deviazione standard, ossia della perdita attesa e della perdita inattesa, a causa del fatto che il grado di asimmetria della distribuzione diminuisce al crescere della media. Più in particolare, i *capital multiplier* medi per classe di rating vanno in questo caso da un massimo di 4,3 a un minimo di 2,4. Se si utilizzasse un livello di confidenza del 99,9% essi andrebbero da un massimo di 8,4 a un minimo di 2,4.

geografiche (un esempio di cluster geo-settoriale potrebbe essere rappresentato dalle imprese di servizi della macroregione Nord-Est), considerando questi ultimi come le variabili capaci di spiegare la diversificazione di portafoglio.

Le variabili rilevanti che occorre considerare quando si vuole stimare il VaR dell'intero portafoglio, oltre al grado di rischio delle singole esposizioni che lo compongono, sono dunque due:

- (i) la composizione geo-settoriale del portafoglio;
- (ii) la struttura delle correlazioni fra tassi di perdita dei cluster geo-settoriali<sup>18</sup>.

L'esposizione a rischio (EAR) dei cluster geo-settoriali

Per ogni cluster geo-settoriale *i*-esimo occorre anzitutto stimare una complessiva perdita inattesa ( $UL_i$ ). Quest'ultima è data dall'aggregazione di tutte le EAD del singolo cluster, ognuna ponderata in base al relativo tasso di perdita inattesa ( $ULR_j$ ). In pratica, una volta identificate tutte le esposizioni appartenenti a un certo cluster, queste ultime vengono moltiplicate per il relativo tasso di perdita inattesa e aggregate fra loro. Si utilizza in questa sede il termine "aggregazione" al posto di quello di "somma" per il fatto che parte del rischio, ossia della variabilità del relativo tasso di perdita, delle singole esposizioni di un cluster viene eliminata grazie all'effetto di diversificazione. Ciò in quanto, pur essendo caratterizzate dal medesimo profilo di rischio sistematico, le esposizioni di uno stesso cluster sono caratterizzate da un diverso rischio specifico, il quale viene ridotto grazie alla diversificazione. Analiticamente:

$$(9) \quad UL_i = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{y=1}^m (EAD_{j,y} \cdot ULR_j \cdot r_{j,y})}$$

dove:

- ✓  $UL_i$  rappresenta la complessiva perdita inattesa del cluster *i*-esimo;
- ✓  $EAD_j$  rappresenta l'esposizione attesa all'insolvenza relativa al prestito *j*-esimo;
- ✓  $ULR_j$  rappresenta il tasso di perdita inattesa relativo al prestito *j*-esimo;
- ✓  $r_{j,y}$  rappresenta il coefficiente di correlazione fra i tassi di perdita (originati dalle insolvenze o dalle migrazioni, così come illustrato nel precedente paragrafo 2.1.5) fra l'esposizione *j*-esima e *y*-esima, entrambe appartenenti al medesimo cluster *i*-esimo<sup>19</sup>;
- ✓ *m* rappresenta il numero di esposizioni appartenenti al cluster *i*-esimo.

Il VaR di portafoglio può a questo punto essere stimato attraverso la seguente formulazione:

Il VaR del portafoglio

$$(10) \quad VaR_p = K \cdot \sqrt{[UL_1, UL_2, UL_3, \dots, UL_N] \times \begin{bmatrix} r_{1,1}, r_{1,2}, r_{1,3}, \dots, r_{1,N} \\ r_{2,1}, r_{2,2}, r_{2,3}, \dots \\ \dots \\ \dots \\ r_{N,1}, r_{N,2}, r_{N,3}, \dots, r_{N,N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} UL_1 \\ UL_2 \\ UL_3 \\ \dots \\ UL_N \end{bmatrix}}$$

<sup>18</sup> La definizione dei cluster geo-settoriali dipende naturalmente da fattori specifici della singola banca (dimensione e grado di diversificazione del relativo portafoglio) e dalla esigenza di ottenere coefficienti di correlazione statisticamente significativi e temporalmente stabili. Da questo punto di vista l'utilizzo di un numero limitato di aree geografiche e di settori produttivi è preferibile a una soluzione basata su un numero elevato di cluster geo-settoriali. Così, ad esempio, un cluster potrebbe essere l'incrocio fra area geografica NordEst e settore Servizi. Un secondo cluster potrebbe essere il NordEst-Industria, e così via.

<sup>19</sup> Per maggiori informazioni circa le modalità di stima di tali parametri si veda il successivo capitolo 2.2.

dove:

- ✓  $K$  rappresenta il *capital multiplier* relativo al complessivo portafoglio della banca<sup>20</sup>;
- ✓  $UL$  rappresenta il vettore composto dalle perdite inattese degli  $N$  *cluster* del portafoglio della banca e dunque, indirettamente, la composizione del portafoglio;
- ✓  $r_{ij}$  rappresenta il coefficiente di correlazione fra i tassi di perdita, originati dalle insolvenze o dalle migrazioni, relativi ai cluster *i-esimo* e *j-esimo*<sup>21</sup>.

E' a questo punto possibile illustrare il procedimento relativo alla stima del VaR diversificato dell'esposizione *j-esima*.

Il VaR diversificato è generalmente inferiore al VaR individuale perché parte del rischio della singola esposizione, identificabile nella componente "specificata" o "idiosincronica", viene eliminata grazie alla diversificazione del portafoglio. Per identificare l'entità di questo effetto virtuoso di diversificazione è necessario considerare tre variabili rilevanti:

I cluster geo-settoriali e le correlazioni fra tassi di perdita

- (1) la dimensione dell'esposizione *j-esima*;
- (2) la composizione geo-settoriale del portafoglio;
- (3) la struttura delle correlazioni fra i tassi di perdita dei cluster geo-settoriali<sup>22</sup>.

In generale, a parità di altre condizioni, il VaR diversificato di un'esposizione sarà tanto minore:

La stima del Component VaR

- (i) quanto minore è la dimensione dell'esposizione;
- (ii) quanto minore è la quota del portafoglio di esposizioni della banca nel cluster geo-settoriale cui fa riferimento l'esposizione in esame;
- (iii) quanto minore è il grado di correlazione medio fra il tasso di insolvenza del cluster geo-settoriale cui fa riferimento l'esposizione in esame rispetto agli altri cluster nei quali è ripartito il portafoglio della banca.

Alla luce di tali considerazioni, è possibile ottenere il VaR diversificato di un'esposizione moltiplicando la corrispondente perdita inattesa per un fattore correttivo compreso fra zero e uno<sup>23</sup>. Più precisamente, moltiplicando la perdita inattesa individuale per un fattore ottenuto come prodotto fra: (i) un vettore riga rappresentativo della composizione del portafoglio, (ii) la matrice delle correlazioni tra cluster; (iii) il vettore colonna relativo al *mapping* della singola esposizione. Analiticamente:

---

<sup>20</sup> Quest'ultimo è normalmente inferiore al capital multiplier relativo alle singole esposizioni. Per maggiori approfondimenti su questo aspetto, si vedano i successivi capitoli 3.2 e 3.3.

<sup>21</sup> Per un esame dei possibili criteri di stima di tali parametri si veda il successivo capitolo 2.2.

<sup>22</sup> La definizione dei cluster geo-settoriali dipende naturalmente da fattori specifici della singola banca (dimensione e grado di diversificazione del relativo portafoglio) e dalla esigenza di ottenere coefficienti di correlazione statisticamente significativi e temporalmente stabili. Da questo punto di vista l'utilizzo di un numero limitato di aree geografiche e di settori produttivi è preferibile a una soluzione basata su un numero elevato di cluster geo-settoriali. Così, ad esempio, un cluster potrebbe essere l'incrocio fra area geografica NordEst e settore Servizi. Un secondo cluster potrebbe essere il NordEst-Industria, e così via.

<sup>23</sup> Tale fattore correttivo potrebbe teoricamente assumere anche valori negativi nel caso in cui il livello medio delle correlazioni del cluster cui è attribuita la singola esposizione e gli altri cluster fosse inferiore a zero. In questo remoto caso, peraltro, il contributo della singola esposizione al rischio complessivo del portafoglio sarebbe effettivamente negativo.

$$(11) \quad CVaR_j = K \cdot (UL_j)[q_1, q_2, q_3, \dots, q_N] \times \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,1}, \mathbf{r}_{1,2}, \mathbf{r}_{1,3}, \dots, \mathbf{r}_{1,N} \\ \mathbf{r}_{2,1}, \mathbf{r}_{2,2}, \mathbf{r}_{2,3}, \dots \\ \dots \\ \dots \\ \mathbf{r}_{N,1}, \mathbf{r}_{N,2}, \mathbf{r}_{N,3}, \dots, \mathbf{r}_{N,N} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \dots \\ m_N \end{bmatrix}$$

dove:

- $CVaR$  rappresenta il VaR diversificato o “*Component VaR*”<sup>24</sup>;
- $K$  rappresenta il *capital multiplier* relativo all’esposizione  $j$ -esima;
- $q_j$  rappresenta un vettore di pesi ognuno dei quali è dato dalla proporzione del rischio del portafoglio attribuita al cluster  $i$ -esimo; in pratica, il vettore  $q$  rappresenta la composizione geo-settoriale, in termini di perdite inattese, del portafoglio della banca;
- $r_{i,j}$  rappresenta il coefficiente di correlazione fra i tassi di perdita, originati dalle insolvenze o dalle migrazioni dei cluster  $i$ -esimo e  $j$ -esimo;
- $m_j$  rappresenta un vettore di pesi, ognuno dei quali è dato dalla proporzione del rischio di  $j$  dovuta ai singoli cluster<sup>25</sup>.

## 2.1.8 Conclusioni

Nel corso di questo capitolo si è illustrato un approccio semplificato alla stima del rischio delle esposizioni creditizie di una banca coerente con una logica di tipo VaR. Come già accennato nell’introduzione di questo manuale, le scelte effettuate sono derivate principalmente dall’intenzione di proporre una metodologia che risultasse funzionale alla stima del rischio di esposizioni derivanti dalla tradizionale attività di prestito di una banca. Si è dunque ipotizzato di considerare il caso di attività illiquide, prive di un mercato secondario così come di un rating esterno. E’ questa infatti la natura della grande maggioranza delle esposizioni creditizie di una banca commerciale.

Più in particolare, l’approccio descritto si caratterizza per il fatto di essere:

- multistato;
- basato sui tassi di insolvenza derivati da un sistema interno di rating;
- basato su un orizzonte temporale annuo per la stima della perdita inattesa;
- *unconditional*, ossia basato su tassi di insolvenza e tassi di migrazione ottenuti da un sistema di rating interno senza correzioni basate sulle prospettive di evoluzione del ciclo economico;

<sup>24</sup> Per maggiori informazioni relative al concetto di component VaR, alla differenza rispetto al concetto di VaR marginale e al suo concreto utilizzo nell’ambito di un sistema di reportistica direzionale relativa al rischio di credito, si vedano i successivi capitoli 3.2 e 3.3.

<sup>25</sup> L’ultimo vettore, rappresentativo del *mapping* della singola esposizione, è verosimilmente costituito da valori nulli e da un unico valore pari a 1. Ciò è dovuto al fatto che, seppure sia teoricamente possibile “mappare” la singola esposizione a un numero anche elevato di cluster geo-settoriali, in realtà questa procedura, oltre che incerta metodologicamente, risulta priva di significato se la fonte informativa per la stima delle correlazioni è rappresentata da una base dati dove ogni singola esposizione viene attribuita a un singolo settore produttivo e a una singola regione geografica, come per i dati della Base informativa pubblica utilizzati nel capitolo successivo.

- in “forma chiusa”, ossia non basato su tecniche di simulazione, ma piuttosto sull’utilizzo di una distribuzione nota dei tassi di perdita che approssimi in modo adeguato il grado di asimmetria e consenta dunque ottenere il VaR delle singole esposizioni;
- fondato sulle correlazioni fra tassi di perdita geo-settoriali per la stima del VaR di portafoglio e del VaR diversificato delle singole esposizioni.

Queste scelte sono peraltro coerenti con l’obiettivo di ottenere un approccio che dia priorità agli obiettivi di tipo “micro” dei modelli VaR applicati al rischio di credito: *pricing* delle singole operazioni, determinazione delle riserve/rettifiche di valore, stima della redditività corretta per il rischio delle singole operazioni. Minore attenzione è stata invece prestata agli obiettivi di tipo “macro”, legati prevalentemente all’ottimizzazione della composizione del portafoglio.