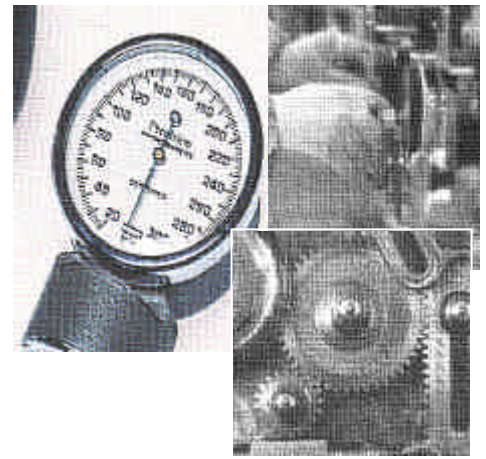


1.6 La stima del valore dell'esposizione a rischio di insolvenza

CRISTIANO ZAZZARA



1.6.1 Introduzione

1.6.2 L'esposizione a rischio: cenni sulle tipologie e sulle tecniche di valutazione

1.6.3 La valutazione dell'esposizione nei principali modelli per il rischio di credito

1.6.4 La valutazione delle esposizioni a valore incerto: l'Adjusted Exposure e l'Usage Given Default

1.6.5 Conclusioni

Appendici

✓ Highlights

Questo capitolo illustra le problematiche relative alla valutazione dell'esposizione a rischio di insolvenza. Si distinguono due tipi di esposizione: a) a valore certo e b) a valore incerto. I metodi di valutazione dell'esposizione a rischio di insolvenza differiscono proprio in base a questa classificazione.

Per la prima tipologia di esposizioni si mostrano gli approcci utilizzati nei tre principali modelli per il rischio di credito pubblicamente disponibili. Successivamente, si descrive un possibile metodo per stimare le esposizioni del secondo tipo.

In generale, le peculiarità delle operazioni di affidamento rendono necessarie attente valutazioni, non solo quantitative ma soprattutto soggettive, da parte dei gestori del credito.

1.6.1 Introduzione

Nella misurazione del rischio di credito bancario, le variabili fondamentali sono rappresentate dal valore dell'esposizione a scadenza, dalla probabilità di insolvenza della controparte e dal tasso di recupero in caso di insolvenza. Sulle ultime due variabili ci siamo già intrattenuti nel corso dei precedenti capitoli, mentre in questo analizzeremo la variabile "esposizione", con particolare riferimento alle poste del banking book (ossia, le attività illiquide che non hanno un mercato secondario di negoziazione, come ad esempio i prestiti¹).

L'esposizione ha una connotazione particolare, che dipende soprattutto dalla specifica forma tecnica nella quale si estrinseca il fido accordato al prenditore. In particolare, possiamo trovarci di fronte ad esposizioni a valore certo o incerto, che richiedono metodi di valutazione differenti. Ad esempio, nel caso della concessione di un mutuo senza facoltà di rimborso anticipato siamo di fronte ad un'esposizione a valore certo, dal momento che l'erogazione è pari all'ammontare definito nel momento del perfezionamento del contratto tra la banca e il cliente. Al contrario, nel

L'esposizione a rischio di insolvenza

¹ La necessità di stimare il valore futuro dell'esposizione è importante per la banca non solo per la misurazione del rischio di credito, ma anche per ragioni di carattere gestionale. Infatti, il mancato utilizzo dei fondi da parte dei prenditori dà origine ad un costo opportunità, dal momento che questi fondi avrebbero potuto essere impiegati in modo più redditizio e razionale. La banca può investire parte dei margini inutilizzati; in questo modo, però, potrebbe trovarsi di fronte all'impossibilità di soddisfare le richieste della clientela, qualora questa volesse ricorrere all'intero fido accordato.

caso di un'apertura di credito in conto corrente, il valore dell'esposizione a rischio sarà noto solo alla fine dell'orizzonte di rischio.

Sovente i modelli sul rischio di credito pubblicamente disponibili dedicano scarsa attenzione alle problematiche legate all'esposizione. Nel corso del capitolo mostreremo invece l'importanza di riuscire a stimare nel modo più corretto il valore dell'esposizione a rischio, per evitare distorsioni nella misurazione del rischio di credito.

Il capitolo è organizzato nel seguente modo. Nel paragrafo 2, accenneremo ad alcune tipologie di esposizioni bancarie e alle loro tecniche di valutazione. Nel paragrafo 3, descriveremo gli approcci seguiti dai principali modelli per il rischio di credito nella valutazione dell'esposizione a rischio di insolvenza, adatti per le esposizioni a valore certo. Successivamente, ci soffermeremo sulla valutazione delle esposizioni a valore incerto, in particolare sulle aperture di credito in conto corrente. Infine, nel paragrafo 5 forniremo le nostre conclusioni, mentre nelle appendici al capitolo approfondiremo alcune tematiche di natura più avanzata.

1.6.2 L'esposizione a rischio: cenni sulle tipologie e sulle tecniche di valutazione

Le esposizioni bancarie sono operazioni peculiari che scaturiscono da un accordo tra la banca e il cliente (usualmente definito "prenditore"), che beneficerà del credito messo a disposizione. Le condizioni di questo accordo possono variare da caso a caso e non sempre è facile ricondurre un particolare contratto di credito ad un insieme di tipologie prefissate².

Le tipologie di esposizioni

In generale, la banca concede al cliente un fido, che consiste in un impegno a mettere a disposizione una somma di denaro o a garantire per suo conto un'operazione. L'importo del fido è sempre determinato poiché la banca non può concedere al cliente la facoltà di stabilire secondo le proprie esigenze il volume di credito di cui abbisogna. Tale importo massimo può però essere utilizzato in diversi modi: in una sola volta e totalmente, oppure gradatamente entro limiti di tempo prestabiliti o indeterminati. Le clausole che qualificano i fidi sono quindi assai varie e più o meno specifiche a seconda del tipo di rapporto che intercorre fra la banca concedente e il beneficiario.

Le prestazioni nelle quali si estrinseca il fido possono avere una duplice natura: a) monetaria e b) *non* monetaria. Le esposizioni di natura monetaria, chiamate tecnicamente esposizioni per cassa, possono assumere diverse forme tecniche, tra le quali ricordiamo le aperture di credito in conto corrente, i prestiti basati sullo smobilizzo dei crediti commerciali, le anticipazioni, i riporti e i mutui. Le esposizioni di natura *non* monetaria, invece, sono rappresentate principalmente dai crediti di firma. Questi ultimi, che rappresentano posizioni fuori bilancio, non danno luogo a nessun esborso finanziario anche se a fonte di determinati eventi previsti dal contratto sottostante (ad es. in caso di inadempimento di una certa obbligazione da parte dell'azienda affidata), la banca dovrà sostenere effettive uscite di denaro. In genere, le esposizioni di natura monetaria rappresentano la componente principale, in termini di volumi, dei crediti bancari³.

La maggior parte della clientela richiede i finanziamenti quando se ne presenta la necessità ma accade spesso che le imprese cerchino invece direttamente un fido, cioè una promessa di futura assistenza creditizia. Esse vogliono infatti assicurarsi una certa disponibilità di credito in vista di esigenze future o prima di intraprendere determinate iniziative che comportano un'espansione del fabbisogno finanziario aziendale. L'obbligazione della banca consiste, pertanto, nel tenere a disposizione del

² Per una esaustiva descrizione delle varie tipologie di esposizioni bancarie, cfr. Ruozi (1997, pag. 105 e segg.).

³ Secondo una recente indagine sulle statistiche di rischio delle maggiori banche italiane, condotta nell'ambito delle attività dell'Osservatorio Permanente sui Rischi Bancari del FITD, risulta che i crediti di natura non monetaria superano di rado il 10% dei crediti totali.

prenditore una somma di denaro (per un dato periodo di tempo o a tempo indeterminato). Inoltre, durante la vita del contratto di affidamento, l'impegno della banca può essere revocabile oppure irrevocabile (un elemento estremamente importante dal punto di vista della gestione del rischio). Si osservi infine che non sussiste, per il prenditore, alcun obbligo di utilizzare il fido: può quindi accadere che il contratto non dia luogo all'effettiva concessione di credito in vista della quale esso era stato stipulato.

Per la stima del rischio di credito, è importante quindi distinguere i casi in cui il cliente:

- ✓ ottiene un credito di firma, ossia un impegno da parte della banca ad assolvere un'obbligazione assunta o garantita per suo conto;
- ✓ ottiene direttamente la concessione del prestito (ad esempio, attraverso lo sconto o l'anticipazione);
- ✓ utilizza immediatamente il prestito per il suo importo massimo;
- ✓ utilizza parzialmente il prestito. Questo caso si verifica abitualmente nelle aperture di credito in conto corrente, di cui le aziende fruiscono di norma gradualmente, in misura mutevole secondo le proprie esigenze.

Le esposizioni a
valore certo e
incerto

Le prime tre categorie sopra elencate possono essere considerate esposizioni *ad importo certo*, mentre l'ultima (utilizzo parziale del credito) rappresenta un'esposizione *ad importo incerto*. Questa distinzione è fondamentale perché nei primi tre casi, essendo noto il valore dell'esposizione, è possibile ricorrere alle usuali tecniche di valutazione (ad esempio, valore nominale, tecnica del valore attuale, ecc.) per determinare il valore dell'esposizione a rischio di insolvenza in un determinato periodo di tempo⁴. Nell'ultimo caso, invece, occorre stimare il valore futuro di questa esposizione, cercando di comprenderne l'evoluzione futura. L'assenza di un importo definito e di un piano di rimborso preciso rendono necessarie tecniche *ad hoc*.

Nel paragrafo successivo presenteremo alcuni metodi utili per esposizioni a valore certo, per le quali è noto in partenza il valore dell'esposizione a rischio di insolvenza e il piano di rimborso. Le esposizioni a valore incerto, la cui logica di valutazione è piuttosto differente (dal momento che occorre stimare quale parte del credito accordato verrà effettivamente utilizzata dall'affidato nell'orizzonte di rischio considerato) verranno invece analizzate nel paragrafo 1.6.4.

1.6.3 La valutazione delle esposizioni certe nei principali modelli per il rischio di credito

In questo paragrafo, come si è detto, descriveremo alcuni metodi di valutazione delle esposizioni certe. In particolare, forniremo un'illustrazione pratica di come l'esposizione venga valutata nei modelli CreditRisk+™ Creditmetrics™ e Portfolio Manager™.

I metodi di
valutazione

Nel valutare le esposizioni ad importo certo, le tecniche adottate sono sostanzialmente tre:

1. si considera il valore nominale dell'esposizione, correggendolo eventualmente per una percentuale di recupero conseguente all'insolvenza. Questo è l'approccio seguito dal modello CreditRisk+™ sviluppato dalla società Credit Suisse First Products;
2. si ricorre al calcolo del valore attuale, scontando i flussi di cassa futuri dell'esposizione ad un tasso di interesse appropriato (ossia, corretto per il rischio di insolvenza). In caso di insolvenza, come già in CreditRisk+™, si corregge il valore

⁴ Tuttavia, malgrado il loro carattere *non* monetario, i crediti di firma sono vere e proprie operazioni di credito, perché impegnano la responsabilità della banca e possono trasformarsi in prestiti per cassa quando l'azienda che ha beneficiato della firma della banca non rispetti gli impegni assunti. Per questa ragione, è usuale valutare i crediti di firma come se fossero vere e proprie esposizioni ad importo certo.

nominale dell'esposizione in base ad una percentuale di recupero. Questo è l'approccio adottato dal modello Creditmetrics™ elaborato dalla banca statunitense JP Morgan e attualmente gestito dalla società di consulenza Riskmetrics Group;

3. si ricorre a un modello di *option pricing*, attualizzando i flussi di cassa "contingenti", ossia condizionati al determinarsi di un particolare evento, in un contesto di neutralità verso il rischio (cosiddetto, approccio "risk-neutral"). Quest'ultimo metodo è utilizzato dal modello Portfolio Manager™, messo a punto dalla società di consulenza americana KMV.

Nel primo caso, la stima ignora le modalità di rimborso del prestito (ossia, il profilo temporale dei flussi di cassa), e conduce piuttosto all'individuazione di un valore massimo dell'esposizione. Negli altri casi si ottiene una stima razionale del valore dell'esposizione; tuttavia, anche i metodi del valore attuale e dell'*option pricing* possono essere applicati solamente alle esposizioni a valore certo. Nel seguito del paragrafo, dopo un breve cenno a CreditRisk+™, presenteremo in maggior dettaglio il secondo e il terzo approccio.

CreditRisk+

Il modello CreditRisk+™ per il rischio di credito, di natura attuariale, si concentra esclusivamente sulle perdite conseguenti al default della controparte. Per tale ragione, è definito un modello "a due stati" (detto anche *default mode*), dove vengono considerati solamente gli eventi "insolvenza" o "sopravvivenza". Nella costruzione del modello si è seguita una logica ispirata alla minimizzazione degli input di partenza e alla semplificazione dei calcoli. In particolare, si ipotizza che il tasso di insolvenza segua una distribuzione statistica predefinita e che il tasso di recupero sia fisso. Anche per quanto riguarda l'esposizione in caso di insolvenza, l'approccio proposto è piuttosto semplicistico. Infatti, gli autori del modello non si soffermano in modo specifico sulle tecniche di valutazione, ma si limitano ad indicare ai gestori del credito di considerare il valore che essi ritengono più appropriato, in considerazione della tipologia dell'operazione e dell'orizzonte temporale di riferimento⁵.

Creditmetrics

Il modello Creditmetrics, diversamente dal precedente, è un modello di tipo "multistato", poiché prevede la possibilità che si verifichino più stati del mondo, oltre al *default*, durante l'intervallo di tempo considerato per la stima del rischio di credito. Sono cioè possibili variazioni del merito creditizio del prestatore, rappresentato da un sistema di *rating*, che classifica i debitori in categorie discrete di rischio (di solito, denominate con lettere, come nel caso delle agenzie di rating Standard & Poor's e Moody's). A queste categorie sono associate determinate probabilità di migrazione e di insolvenza storiche. Un esempio di sistema di *rating*, elaborato dalla società Standard & Poor's⁶, viene riportato nella tavola 1.6.1.

Ovviamente, migliore è la classe di *rating* (cioè, il merito creditizio del prestatore), minore è la sua probabilità di insolvenza entro l'orizzonte di rischio considerato (posto pari ad un anno). Corrispondentemente, anche la stabilità del merito creditizio è maggiore in corrispondenza delle classi di *rating* migliori, come si può notare dalle probabilità di migrazione situate sulla diagonale principale della matrice di transizione ad un anno⁷.

⁵ Cfr. CreditRisk+ (1997), pag. 11: "... it is necessary to make an assumption about the level of exposure in the event of a default: for example, a financial letter of credit will usually be drawn down prior to default and therefore the exposure at risk should be assumed to be the full nominal amount. In addition, if a multi-year time horizon is being used, it is important that the changing exposures over time are accurately captured."

⁶ Questa matrice di transizione è ripresa dal rapporto *CreditWeek*, del 15 aprile 1996, della Standard & Poor's.

⁷ Tuttavia, questo non è sempre vero. Infatti, come si nota dalla matrice di transizione su esposta, l'evidenza storica mostra che la probabilità di rimanere nella stessa classe di rating per un prestatore classificato come "A" è maggiore (91,05%) rispetto a quella di un prestatore classificato come "AA" e addirittura come "AAA" (rispettivamente, pari a 90,65% e 90,81%). Questa incongruenza è nota come problema della "non

Tavola 1.6.1

Matrice di transizione ad un anno

Rating iniziale	Rating a fine anno							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	90.81%	8.33%	0.68%	0.06%	0.12%	0.00%	0.00%	0.00%
AA	0.70%	90.65%	7.79%	0.64%	0.06%	0.14%	0.02%	0.00%
A	0.09%	2.27%	91.05%	5.52%	0.74%	0.26%	0.01%	0.06%
BBB	0.02%	0.33%	5.95%	86.93%	5.30%	1.17%	0.12%	0.18%
BB	0.03%	0.14%	0.67%	7.73%	80.53%	8.84%	1.00%	1.06%
B	0.00%	0.11%	0.24%	0.43%	6.48%	83.46%	4.07%	5.20%
CCC	0.22%	0.00%	0.22%	1.30%	2.38%	11.24%	64.86%	19.79%

Fonte: (Gupton et al., 1997), p. 25

Per chiarire il significato della tavola 1.6.1, nella tabella successiva abbiamo "isolato" la matrice di transizione per un prestatore classificato all'inizio del periodo nella classe BBB. Per questo prestatore, la probabilità di rimanere nella stessa classe di rischio è pari a 86,93%, quella di migrare verso classi migliori, ad esempio, verso la classe AAA è pari a 0,02%, mentre la probabilità che egli vada incontro all'insolvenza è pari a 0,18%. Naturalmente, la somma delle probabilità di tutti i possibili eventi dovrà essere pari al 100%.

Tavola 1.6.2

Probabilità di migrazione ad un anno per un debitore BBB

Rating di fine anno	Probabilità
AAA	0.02%
AA	0.33%
A	5.95%
BBB	86.93%
BB	5.30%
B	1.17%
CCC	0.12%
Default	0.18%
<i>Totale</i>	<i>100.00%</i>

Disponendo, per ogni classe di *rating*, di queste probabilità e dei corrispondenti valori che assumerà il prestito in ognuna di queste classi, saremo in grado di generare la distribuzione probabilistica dei valori del prestito per un prestatore inizialmente classificato come BBB.

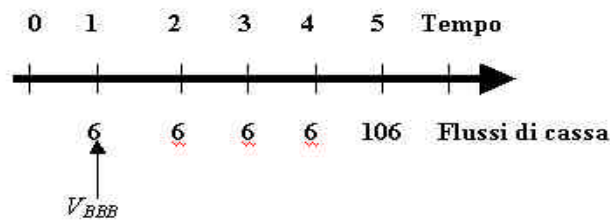
Ma come si determina il valore del prestito, in corrispondenza di ciascuna classe di *rating*, alla fine dell'intervallo di rischio considerato?

Un esempio di
valutazione

Si supponga che una banca conceda ad un prestatore classificato come BBB un prestito del valore nominale di €100, che matura interessi ad un tasso di interesse del 6% annuo (che dà quindi origine ad una rata costante di €6), e ha una durata di 5 anni. Come si mostra nella figura seguente, il valore del prestito (V_{BBB}) alla fine dell'orizzonte temporale prescelto, cioè al tempo 1, sarà uguale al valore attuale dei suoi flussi di cassa residui.

monotonicità" della serie storica delle probabilità di migrazione, e caratterizza sia i dati di Standard & Poor's che quelli di altre società di rating internazionali.

Figura 1.6.1
Flussi di cassa del prestito



Gli autori del modello Creditmetrics™ determinano il valore dell'esposizione a rischio di insolvenza attualizzando questi flussi di cassa futuri in base a tassi di sconto appropriati (ossia, corretti per il rischio). Questi sono rappresentati dai tassi di rendimento futuri (detti *forward*), relativi alle emissioni obbligazionarie societarie per le varie classi di *rating*. In particolare, gli autori utilizzano tassi *forward* validi per operazioni con decorrenza tra un anno, come quelli presentati nella tavola 1.6.3⁸.

Tavola 1.6.3
Tassi di rendimento forward ad un anno per varie classi di rating



Classe di rating	Anno 1	Anno 2	Anno 3	Anno 4
AAA	3.60%	4.17%	4.73%	5.12%
AA	3.65%	4.22%	4.78%	5.17%
A	3.72%	4.32%	4.93%	5.32%
BBB	4.10%	4.67%	5.25%	5.63%
BB	5.55%	6.02%	6.78%	7.27%
B	6.05%	7.02%	8.03%	8.52%
CCC	15.05%	15.02%	14.03%	13.52%

Poiché questi tassi tengono conto del rischio, migliore è la classe di *rating* del prenditore, minore è il tasso di attualizzazione da applicare (e, quindi, maggiore sarà il valore attuale del prestito). Inoltre, ad orizzonti temporali più distanti corrispondono tassi di attualizzazione più elevati⁹.

A questo punto, occorre determinare, per ogni classe di rating, il valore attuale dei flussi di cassa evidenziati nella figura 1, utilizzando i tassi di sconto indicati nella tavola 1.6.3. Ad esempio, nel caso in cui il prenditore rimanesse, alla fine dell'anno, nella classe di *rating* iniziale (cioè, nella classe BBB), il valore attuale del prestito sarebbe pari a:

$$V_{BBB} = 6 + \frac{6}{1 + 0,0410} + \frac{6}{(1 + 0,0467)^2} + \frac{6}{(1 + 0,0525)^3} + \frac{100 + 6}{(1 + 0,0563)^4} = 107,53$$

Eseguendo il calcolo anche per gli altri possibili eventi creditizi (cioè, nel caso di migrazione verso le altre classi di *rating*), si ottengono tutti i valori che potrebbe assumere il prestito in esame alla fine dell'anno:

⁸ Occorre sottolineare che questi tassi si riferiscono al mercato statunitense. Purtroppo, in Italia -- ma anche in Europa -- non è possibile disporre di simili dati, dal momento che le società che ricevono un *rating* sono veramente molto poche (a questo riguarda, si veda Zazzara (1999)). E' possibile comunque derivare tassi di rendimento *forward* per classi di rischio dei prenditori sulla base delle loro probabilità di insolvenza e applicando la logica della neutralità verso il rischio. Per una descrizione di questo metodo, si veda Resti (2000).

⁹ Naturalmente, la struttura a termine dei tassi di interesse potrebbe assumere anche un'altra forma (ad esempio, potrebbe addirittura essere inclinata negativamente, così come si verificava nella fase pre-euro).

Tavola 1.6.4

Valori futuri a un anno per un prestito BBB con valore nominale 100, tasso di interesse 6% e durata pari a 5 anni

Rating di fine anno	Valore (in €)
AAA	109.35
AA	109.17
A	108.64
BBB	107.53
BB	102.01
B	98.09
CCC	83.63
Default	51.13

Il tasso di recupero sull'esposizione in caso di insolvenza

Tuttavia, in caso di *default*, il valore del prestito non viene determinato con la tecnica del valore attuale, ma viene posto pari ad una percentuale del valore nominale del prestito, che rappresenta una stima dell'ammontare che si presume di recuperare in seguito all'insolvenza. In questo caso, gli autori suggeriscono di "ancorare" il valore del prestito in caso di default ad evidenze storiche sui tassi di recupero. In particolare, indicano delle statistiche legate ai tassi di recupero sui prestiti obbligazionari societari, suddivisi per classe di *seniority* (ovvero, in base alla graduazione dei privilegi nel rimborso dei crediti), tratte da uno studio di Carty & Lieberman (1996), ricercatori della società di rating "Moody's Investors Service":

Tavola 1.6.5

Tassi di recupero per classe di seniority (% del valore nominale)

Classe di seniority	Media	Deviazione standard
Senior Secured	53.80%	26.86%
Senior Unsecured	51.13%	25.45%
Senior Subordinated	38.52%	23.81%
Subordinated	32.74%	20.18%
Junior Subordinated	17.09%	10.90%

Ipotizzando che il prestito concesso al prestatore BBB sia del tipo *Senior Unsecured*, si avrà in media, un recupero pari al 51,13% del valore nominale del prestito. Nella tavola 1.6.4, infatti, il valore del prestito in caso di default è stato posto pari a €51,13.

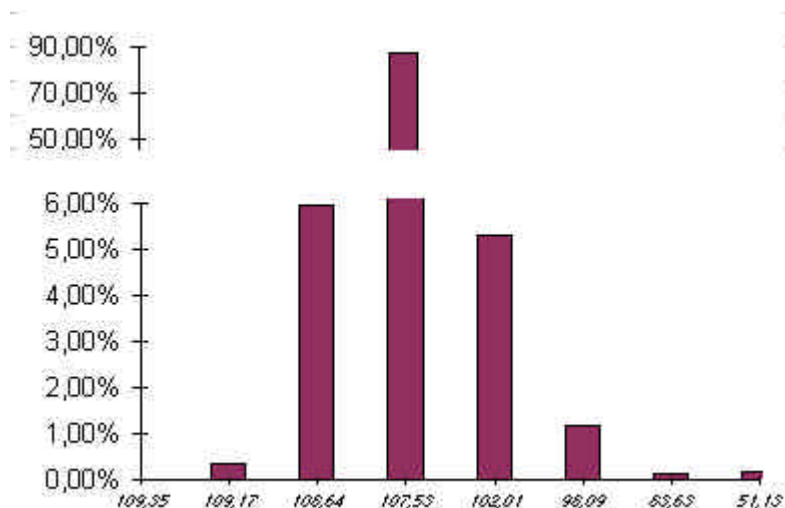
Tavola 1.6.6

Valori futuri e probabilità per il prestito della tavola 1.6.4

Rating di fine anno	Valore (in €)	Probabilità	Variazione valore prestito
AAA	109.35	0.02%	1.82
AA	109.17	0.33%	1.64
A	108.64	5.95%	1.11
BBB	107.53	86.93%	0.00
BB	102.01	5.30%	-5.52
B	98.09	1.17%	-9.45
CCC	83.63	0.12%	-23.91
Default	51.13	0.18%	-56.40

Disponiamo ora di tutte le informazioni per generare la distribuzione del valore del prestito in questione alla fine dell'anno (che, in questo modello, è il momento di valutazione del rischio di credito). Raggruppando i dati precedenti (tavola 1.6.6) e rappresentandoli graficamente (figura 1.6.2), otteniamo il risultato desiderato.

Figura 1.6.2
Distribuzione di valori futuri del prestito



Ovviamente, dalla distribuzione del valore del prestito è immediatamente desumibile anche la distribuzione delle perdite ad esso associate. Tuttavia, rimandiamo i lettori interessati a questo aspetto alla nota contenuta nell'appendice A del presente capitolo.

In conclusione, è opportuno sottolineare che nel modello "multistato" Creditmetrics™ -- dove si considera come perdita anche una variazione al ribasso del merito creditizio della controparte -- l'esposizione è soggetta "a rischio di credito" in generale, e non esclusivamente "a rischio di insolvenza".

La valutazione dell'esposizione secondo la teoria delle opzioni

Nel modello Portfolio Manager™ di KMV l'esposizione viene determinata seguendo un approccio basato sulla *Option Pricing Theory* (OPT), relativo ai flussi di cassa contingenti (cioè, condizionati al verificarsi di un determinato evento). In particolare, la valutazione viene eseguita in un contesto *risk neutral*, ossia di neutralità nei confronti del rischio. In un mercato nel quale gli investitori si comportano in maniera *risk neutral*, i prezzi delle attività finanziarie possono essere determinati scontando i relativi flussi di cassa futuri al tasso di interesse *risk free*.

Inoltre, mentre in Creditmetrics™ l'esposizione viene valutata in un contesto "multistato" (cosiddetto, approccio "Mark-To-Market"), in Portfolio Manager™ la valutazione viene effettuata in un contesto "a due stati", dove si possono verificare solamente due eventi: "insolvenza" o "sopravvivenza" (cosiddetto, approccio "default-mode")¹⁰.

Come già ricordato, l'approccio di KMV si riferisce ad una valutazione *risk neutral*, che deriva il valore dell'esposizione dal valore attuale atteso dei flussi di cassa futuri del prestito rischioso (o di qualsiasi altra attività finanziaria). Tale valore atteso è calcolato usando il tasso di interesse *risk free* e le probabilità di insolvenza *risk neutral* (cfr. appendice B) al posto di quelle effettive.

Un prestito con un solo flusso di cassa futuro

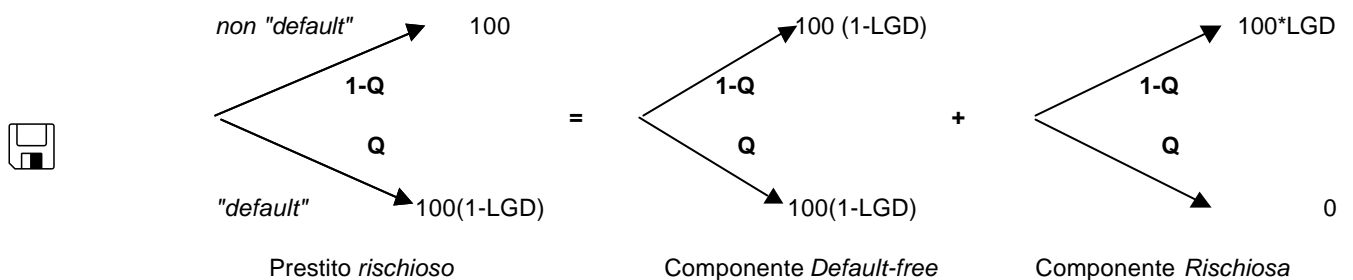
¹⁰ In un altro modello per il rischio di credito, che non esamineremo in questa sede, denominato *Loan Analysis System* (LAS) e sviluppato dalla società di consulenza americana KPMG, viene elaborato un modello di valutazione dell'esposizione con un approccio basato sulla teoria delle opzioni in un contesto "multistato". Per approfondimenti, si vedano Aguais et al. (1997) e Saunders (1999).

La valutazione dei flussi di cassa rischiosi procede in due fasi: 1) valutazione della componente *default-free*; 2) valutazione della componente *Rischiosa*, ossia esposta al rischio di credito. La somma dei valori attuali di queste due componenti è uguale al valore attuale del prestito a rischio di insolvenza.

Vediamo un'applicazione di questo metodo al caso di un prestito che prevede un solo flusso di cassa futuro. Il suo valore nominale è pari a €100, la scadenza è ad un anno, la probabilità di insolvenza *risk neutral* ad un anno (indicata con Q) è pari al 10%, il tasso di recupero è del 60% (quindi, la perdita in caso di default, indicata con LGD, è pari al 40%) e il tasso di interesse r^F *risk free* è pari al 10%. Ecco come appare graficamente questa situazione:

Figura 1.6.3

Suddivisione di un prestito nelle due componenti, rischiosa e default-free



Fonte: Crouhy et al. (2000).

A questo punto, procediamo al calcolo del valore attuale delle due componenti del prestito rischioso, la Componente *Default-free* (VA_1) e la Componente *Rischiosa* (VA_2). Per quanto riguarda la componente *Default free*, la sua valutazione è piuttosto immediata. Infatti, poiché non vi è nessun rischio di default, la probabilità di default "risk neutral" è pari a zero. In questo caso, la componente *Default free* si riduce pertanto a:

$$VA_1 = VA[100 * (1 - LGD)] = \frac{100 * (1 - LGD)}{1 + r^F}$$

che nel caso in questione è pari a €54,55.

Venendo alla componente *Rischiosa*, VA_2 , poiché la probabilità di default "risk neutral", Q, è pari al 10%, il suo valore sarà pari a

$$VA_2 = VA[100 * LGD * (1 - Q) + 0 * Q],$$

che scontato al tasso r^F "risk free" fornisce il valore di €32,73¹¹.

La somma dei valori attuali delle due componenti, che fornisce il valore attuale del nostro prestito a rischio di insolvenza nell'intervallo considerato, è pertanto pari a €54,55+€32,73=€87,31¹².

Se il prestito fosse stato totalmente privo di rischio, cioè "default free", il suo valore

sarebbe stato pari a $VA = \frac{100}{1 + r^F} = 90,9$.

Un prestito con flussi di cassa multiperiodali

¹¹ Infatti, $\frac{[100 * 40% * (1 - 10%) + 0 * 10%]}{1 + 10\%} = 32,73$.

¹² Questo valore è approssimato per eccesso. Per maggiori dettagli, si veda comunque il foglio di lavoro Excel allegato.

Questo metodo può essere esteso anche al caso di flussi di cassa multiperiodali, ottenendo:

$$VA = (1 - LGD) * \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1 + r_t^R)^t} + LGD * \sum_{t=1}^n \frac{(1 - Q)^t C_t}{(1 + r_t^R)^t}$$

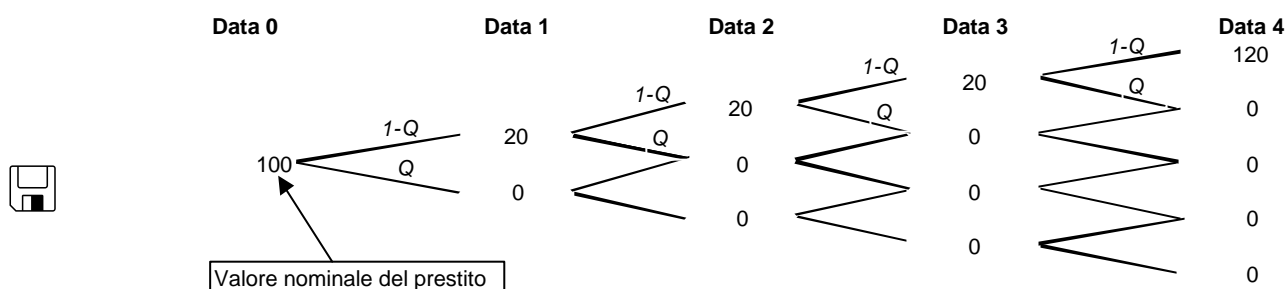
dove C_t = flusso di cassa al tempo t .

Per evitare possibili confusioni, forniamo subito un esempio concreto di valutazione di un prestito rischioso con più flussi di cassa. In particolare, valutiamo un prestito del valore nominale di €100, interesse del 20% (quindi cedola annuale pari a €20), scadenza fra 4 anni, probabilità di insolvenza "risk neutral" ad un anno (indicata con Q) pari al 10%, tasso di recupero dello 0% (quindi, la perdita in caso di default, indicata con LGD , sarà pari al 100%) e tasso di interesse r^f "risk free" pari al 10%.

Come in precedenza, diamo una rappresentazione grafica dei flussi di cassa di questo prestito attraverso il diagramma ad albero della figura 1.6.4. Alle date 1, 2, 3 il flusso di cassa sarà pari a €20, mentre in corrispondenza dell'ultimo anno sarà pari a €100+€20=€120. In ogni periodo, la probabilità di sopravvivenza "risk neutral" è pari a $1 - Q$ ¹³.

Figura 1. 5.4

Estensione del modello a un orizzonte multiperiodale



Poiché, per semplicità abbiamo ipotizzato che la LGD sia pari a 1, la formula precedente si riduce a:

$$\sum_{t=1}^n \frac{C_t (1 - Q)^t}{(1 + r_t^R)^t}$$

Applicando la formula, il valore attuale di questo prestito rischioso risulta pari a €94,98 (cfr. la tavola 15.7 per i dettagli di calcolo).

¹³ Ovviamente, se in qualche periodo il prestito dovesse andare in default il suo valore sarebbe pari a zero e il suo percorso nel diagramma ad albero si arresterebbe.

Tavola 1.6.7

Calcolo del valore attuale del prestito

Anno	Q	Fattore di sconto	Flusso di cassa, C_t	Valore Attuale
1	10.00%	0.9091	20	16.36
2	10.00%	0.8264	20	13.39
3	10.00%	0.7513	20	10.95
4	10.00%	0.6830	120	53.78
<i>Totale</i>				<i>94.48</i>

Le difficoltà di applicazione di Portfolio Manager \hat{O} al contesto italiano

Benché questo modello appaia piuttosto interessante dal punto di vista metodologico, risulta però di difficile applicazione al caso italiano. Infatti, per derivare le probabilità di default "risk neutral" si può ricorrere ai prezzi obbligazionari oppure ai prezzi azionari (per la determinazione della probabilità di default "risk neutral" a partire dai prezzi azionari, si veda l'appendice B). Pertanto, in entrambi i casi le società di cui si vuole analizzare il rischio di credito dovrebbero essere quotate su uno di questi due mercati; purtroppo, questa condizione non si riscontra di frequente (e non solo in Italia) nella maggior parte delle controparti private delle banche¹⁴.

Le esposizioni a valore incerto

1.6.4 La valutazione delle esposizioni a valore incerto: l'*Adjusted Exposure* e la *Usage Given Default*

Nella pratica, la maggior parte delle esposizioni bancarie¹⁵ sono tecnicamente rappresentate da forme che concedono una certa discrezionalità al debitore nel grado di utilizzo del credito¹⁶. Tra queste, le più comuni sono rappresentate dalle aperture di credito in conto corrente e dai crediti di firma.

Le prime, sono caratterizzate da un'incertezza nell'ammontare di credito che verrà utilizzato nel futuro, mentre i secondi hanno un rischio che è solo potenziale, anche se potrebbe essere rilevante qualora la controparte oggetto del contratto andasse incontro all'insolvenza. Mentre nella stima dell'esposizione in caso di insolvenza i crediti di firma possono essere valutati alla stessa stregua di un prestito ad importo certo¹⁷, le aperture di credito in conto corrente richiedono un'attenta valutazione dell'esposizione in caso di insolvenza. In questo paragrafo, cercheremo proprio di fornire un'indicazione su come misurare questa incertezza nell'importo del credito utilizzato.

Le aperture di credito rappresentano degli ammontari che la banca si è impegnata ad erogare a richiesta del prestatore, fino al livello massimo concordato nel contratto. Nella pratica, tale impegno massimo di erogazione -- che viene definito "accordato" -- non viene utilizzato completamente e può essere pertanto scomposto in due parti: a) "utilizzato" (*drawn*) e b) non "utilizzato" (*undrawn*)¹⁸. Ad esempio, nella tavola 1.6.8 abbiamo riportato le percentuali medie di utilizzo, suddivise per classi di importo, dei finanziamenti per cassa concessi dalle banche italiane alla clientela ordinaria¹⁹. Gli

¹⁴ Un'approssimazione dei valori delle attività aziendali e dei suoi parametri (media e deviazione standard) potrebbe essere ottenuta dai valori contabili, ma questa è un'altra storia...

¹⁵ Sempre sulla base dell'indagine condotta sulle statistiche di rischio delle maggiori banche italiane (al riguardo, si veda la nota 1), le esposizioni ad importo incerto rappresentano all'incirca il 70% del totale delle esposizioni di natura monetaria.

¹⁶ Su questa problematica si veda anche Saita (2000), pag. 174 e segg.

¹⁷ Al riguardo, si vedano le considerazioni riportate nella nota 2.

¹⁸ Che è ovviamente pari alla differenza tra l'accordato e l'utilizzato.

¹⁹ Questi dati sono riportati nel foglio di lavoro allegato.

utilizzi medi oscillano all'incirca tra il 57% e il 73% e sembrano dipendere dalle dimensioni dell'apertura di credito (maggiore è l'apertura di credito, minore è l'utilizzo)²⁰.

Tavola 1.6.8

Grado di utilizzo dei finanziamenti per cassa in Italia



Classe di importo	Utilizzato
Da >= 150 a < 250 milioni	72.87%
Da >= 250 a < 500 milioni	72.33%
Da >= 500 a < 1000 milioni	69.27%
Da >= 1000 a < 5000 milioni	67.44%
Da >= 5000 a < 10000 milioni	64.80%
Da >= 10000 a < 50000 milioni	61.67%
50000 milioni e oltre	56.95%

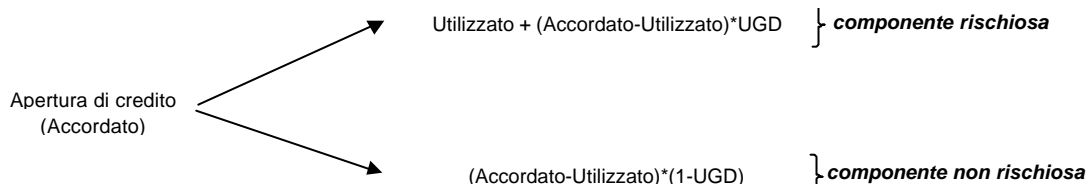
Valori medi riferiti al periodo 31/03/98-30/06/00.
Fonte: Banca d'Italia, Base Informativa Pubblica, ottobre 2000.

L'Adjusted Exposure e la Usage Given Default

Ai fini della determinazione dell'esposizione a rischio è importante stimare la parte effettivamente utilizzata nel caso in cui il prenditore dovesse andare incontro all'insolvenza; solamente questa parte, ovviamente, è soggetta al rischio di perdite. Secondo una logica simile a quella vista nel paragrafo precedente, l'apertura di credito può pertanto essere ulteriormente suddivisa in due parti, la componente *rischiosa* e quella *non rischiosa*:

Figura 1.6.5

Componente rischiosa e non rischiosa di un'esposizione variabile



La componente rischiosa dell'esposizione accordata, che è appunto quella effettivamente soggetta a rischio, viene comunemente definita *Adjusted Exposure* (AE) ed è pari al valore dell'utilizzato più una frazione del margine ancora disponibile, denominata *Usage Given Default* (UGD)²¹, che può variare in base alle esigenze finanziarie del prenditore. Per differenza, la componente non rischiosa è invece pari a: (Accordato - Utilizzato) * (1-UGD).

Il prenditore, in una situazione di fabbisogno finanziario "normale", utilizzerà una certa percentuale dell'esposizione accordata; tuttavia, in seguito a mutamenti nelle proprie esigenze finanziarie, egli potrà comunque ricorrere alla parte ancora disponibile sull'apertura di credito. Questa posta "eventuale", la UGD appunto, è la variabile chiave nella stima dell'esposizione a rischio di insolvenza e si materializza, usualmente, quando le condizioni finanziarie del prenditore peggiorano. La UGD è in sostanza un diritto d'opzione che viene concesso dalla banca al prenditore in contropartita di un premio noto come "commissione di impegno"²² e rappresenta per l'affidato una sorta

²⁰ Dalla Base Informativa Pubblica della Banca d'Italia è possibile reperire ulteriori informazioni (sempre con riferimento al sistema bancario nel suo complesso), come ad esempio il grado di utilizzo suddiviso per settori, regioni, ecc..

²¹ In gergo tecnico, la UGD viene anche definita come "tiraggio".

²² Questa commissione è determinata percentualmente sulla parte non utilizzata della linea di credito, quale remunerazione dell'impegno del concedente (cioè, la banca) a rendere disponibili i fondi su richiesta del prenditore.

di assicurazione contro l'eventualità di non poter più finanziare le proprie attività. Tuttavia, la sua stima risulta particolarmente problematica, soprattutto in considerazione del fatto che ogni apertura di credito, con le sue clausole, rende la UGD una variabile "unica" e diversa per ogni affidamento.

La valutazione di
un loan
commitment

Un tentativo di stima di questa variabile è stato compiuto alcuni anni fa da Asarnow e Marker (1995), che hanno analizzato i dati storici dei *loan commitments*²³, suddivisi per classi di rating, della banca statunitense Citibank. I risultati del loro studio, ripresi dal documento tecnico di Creditmetrics²⁴, sono stati riportati nella tavola seguente:

Tavola 1.6.9

Grado di utilizzo medio dei loan commitments della Citibank in funzione della classe di rating



Classe di rating	Percentuale media di		
	Percentuale di credito utilizzato (a)	utilizzo, in caso di default, del credito normalmente non utilizzato (UGD) (b)	Componente Rischiosa = (a)+(b)*[1-(a)]
AAA	0.1%	69%	69.03%
AA	1.6%	73%	73.43%
A	4.6%	71%	72.33%
BBB	20.0%	65%	72.00%
BB	46.8%	52%	74.46%
B	63.7%	48%	81.12%
CCC	75.0%	44%	86.00%

Fonte: Asarnow e Marker, 1995

E' evidente come la componente rischiosa di un impegno di affidamento aumenti in seguito al deterioramento del merito creditizio dell'affidato (dal 69% per un prenditore classificato "AAA", all'86% per un prenditore classificato "CCC"). Com'era lecito attendersi, al deteriorarsi del suo merito creditizio, e in particolare in prossimità dell'insolvenza, l'affidato tende ad utilizzare maggiormente la linea di credito accordata²⁵. Ad esempio, un prenditore classificato come AA all'inizio del periodo avrà in media, una UGD pari al 73% dell'ammontare di credito non ancora utilizzato in caso di default (durante il periodo di rischio considerato). Quindi, benché il suo utilizzo medio sia piuttosto ridotto (solo l'1,6% dell'ammontare accordato), in caso di default, la sua UGD risulterebbe piuttosto elevata. La mancata considerazione di questo aspetto indurrebbe pertanto ad una sottostima dell'esposizione a rischio in caso di insolvenza.

Dai dati di Asarnow e Marker, è possibile generare la distribuzione dei valori dell'impegno di affidamento per ogni classe di rating. Seguendo l'esempio riportato nel documento tecnico di Creditmetrics (pag. 45), ipotizziamo che una banca abbia concesso un *loan commitment* di \$100 ad un prenditore classificato inizialmente nella classe di rating "A". Con riferimento ai dati della tabella precedente, l'evidenza storica mostra che l'utilizzo medio di un'apertura di credito per un prenditore di classe "A" è pari al 4,6% del valore dell'apertura originaria (cioè, \$4,6). Quello che vogliamo mostrare in questa sede è come varia il valore dell'esposizione a rischio in funzione di

²³ I *loan commitments* sono una categoria di operazioni "fuori bilancio" costituita dagli impegni, revocabili o meno, assunti da una banca nei confronti della clientela, ad erogare in futuro risorse finanziarie a titolo di prestito. Rientrano in tale forma di esposizione anche gli scoperti di conto consentiti non ancora utilizzati.

²⁴ Cfr. Gupton et al. (1997), pag. 45.

²⁵ Il riferimento è ovviamente alla componente rischiosa. Infatti, l'utilizzo sui margini disponibili della linea di credito in realtà decresce al peggiorare del merito creditizio dell'affidato (ad esempio, 73% per un prenditore classificato "AA" e 44% per un prenditore classificato "CCC").

tutte le possibili migrazioni del merito creditizio iniziale del prenditore, includendo anche la migrazione verso il default. Nella tabella seguente, riportiamo le variazioni percentuali dell'utilizzo del *loan commitment* per questo prenditore di classe "A":

Tavola 1.6.10

Variazioni % dell'utilizzo del loan commitment per un prenditore di classe "A"



Classe di rating	Percentuale di credito utilizzato (a)	Percentuale di credito NON utilizzato	Variazioni nella parte utilizzata
AAA	0.1%	99.9%	-4.7%
AA	1.6%	98.4%	-3.1%
A	4.6%	95.4%	0.0%
BBB	20.0%	80.0%	16.1%
BB	46.8%	53.2%	44.2%
B	63.7%	36.3%	61.9%
CCC	75.0%	25.0%	73.8%

Fonte: nostre elaborazioni su dati di Asarnow e Marker, 1995

Siamo ora in grado di determinare le possibili variazioni dell'utilizzo e le stime del nuovo utilizzo complessivo (in valore assoluto) in seguito alle migrazioni del nostro prenditore verso le altre classi di rating (cfr tavola 1.6.11 e figura 1.6.6).

Tavola 1.6.11

Stima delle variazioni dell'utilizzo e del nuovo utilizzo per un prenditore originariamente classificato come "A" (utilizzo di \$4,6 su un accordato di \$100) - Valori in \$



Classe di rating di partenza	Classe di rating di arrivo	Utilizzo corrente	Variazioni nell'utilizzo	Stime del nuovo utilizzo
A	AAA		-4.5	0.1
	AA		-3.0	1.6
	A	4.6	0.0	4.6
	BBB		15.4	20.0
	BB		42.2	46.8
	B		59.1	63.7
	CCC		70.4	75.0
	Default		67.7	72.3

Fonte: nostre elaborazioni su dati di Asarnow e Marker, 1995

Abbiamo così presentato la logica di fondo che si utilizza per stimare il valore delle esposizioni ad importo incerto. Come è possibile notare, il problema principale non risiede tanto nel metodo ma piuttosto nella disponibilità di informazioni sull'evoluzione della UGD in funzione delle variazioni del merito creditizio del prenditore²⁶. Infatti, non è possibile rinvenire in pratica stime di consenso sulla dimensione di questa variabile, dal momento che solo all'interno delle singole banche si dispone delle appropriate informazioni relative all'effettivo grado di utilizzo delle linee di credito da parte della clientela. Inoltre, la maggior parte delle aperture di credito bancarie sono "revocabili" e quindi non è detto che l'esposizione raggiunga i limiti indicati da Asarnow e Marker. E' da sottolineare, tuttavia, che non è facile riconoscere e monitorare la variazione della UGD al variare delle condizioni finanziarie dell'affidato, anche in virtù della pratica diffusa dei fidi multipli che rende ancora più difficile questo controllo; inoltre, una volta

Le difficoltà di stima della UGD

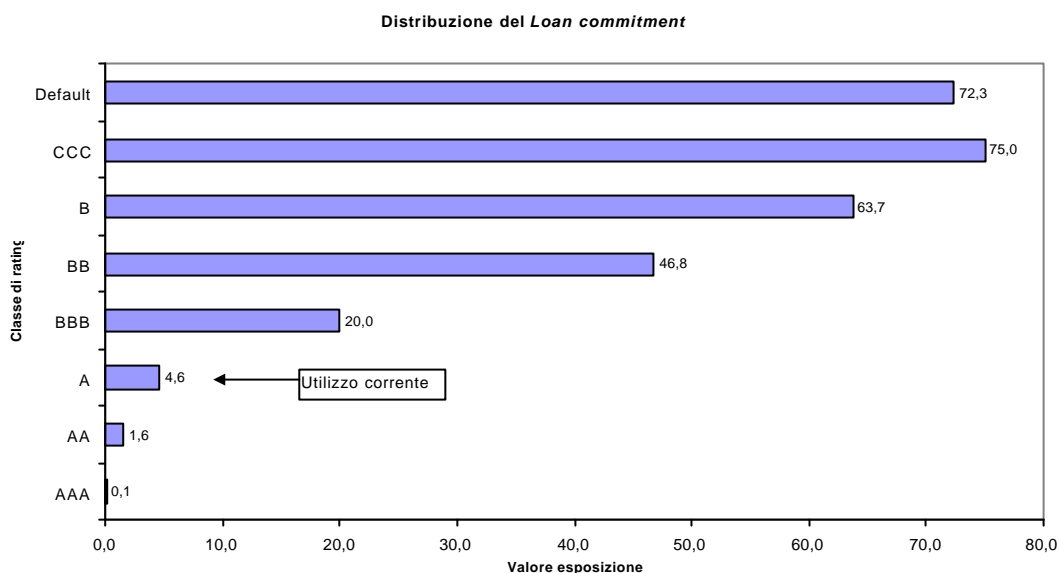
²⁶ Questa analisi potrebbe essere resa ancora più precisa includendo anche la commissione di impegno nei calcoli precedenti. Tuttavia, la sua esclusione non inficia il ragionamento condotto fino ad ora.

che la controparte si trova in prossimità del default è comunque difficile per la banca ridurre l'esposizione.

Diverse banche italiane attualmente effettuano stime della UGD per le proprie controparti, articolate per tipologia dell'operazione e per area geografica. L'evoluzione dei sistemi interni di rating permetterà di differenziare queste stime in funzione del merito di credito della clientela.

Figura 1.6.6

Distribuzione dei possibili utilizzi di un loan commitment



1.6.5. Conclusioni

Nel corso del capitolo abbiamo illustrato le problematiche relative alla valutazione dell'esposizione a rischio di insolvenza, con particolare riferimento ai prestiti bancari.

Abbiamo distinto due tipi di esposizione: a) a valore certo e b) a valore incerto. I metodi di valutazione dell'esposizione a rischio di insolvenza differiscono proprio in base a questa classificazione.

Per la prima tipologia di esposizioni abbiamo mostrato gli approcci utilizzati nei tre principali modelli per il rischio di credito pubblicamente disponibili. Successivamente, abbiamo descritto un possibile metodo per stimare le esposizioni del secondo tipo.

In generale, i dati e i metodi per la stima dell'esposizione a rischio di insolvenza si "scontrano" con le peculiarità delle operazioni di affidamento, che rendono necessarie attente valutazioni, non solo quantitative ma soprattutto soggettive, da parte dei gestori del credito. In conclusione, la stima dell'esposizione a rischio di insolvenza non può essere ridotta ad un semplice esercizio matematico.

Appendice A: la determinazione della distribuzione delle perdite associate ad un prestito nel modello Creditmetrics[®]

Dalla tavola 1.6.6 riportata nel paragrafo 1.6.3 è possibile derivare la distribuzione delle perdite associate al prestito bancario da noi utilizzato come esempio.

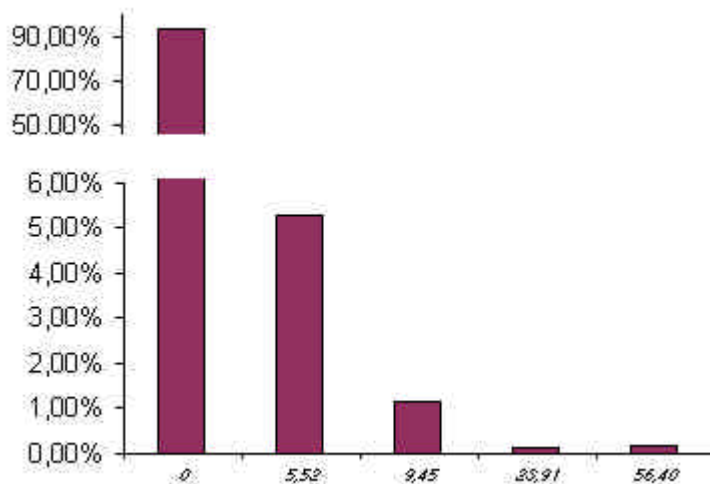
Per determinare questa distribuzione, occorre però fare attenzione alla determinazione della probabilità associata all'evento "perdite zero". Questo evento, infatti, ha una probabilità pari alla somma della probabilità che si verifichino perdite pari a "zero" e delle probabilità che si verifichino dei guadagni, ossia che il prestito migri verso classi di rating migliori. Di seguito, riportiamo la tabella e il grafico della distribuzione delle perdite associate al prestito:

Tavola A.1
Perdite e relative probabilità



Perdite	Probabilità
0	93.23%
5.52	5.30%
9.45	1.17%
23.91	0.12%
56.40	0.18%
Totale	100.00%

Figura A.1
Distribuzione delle perdite



Uno sguardo al grafico evidenzia come la distribuzione dei valori delle perdite non sia affatto "normale" (caso tipico, ad esempio, per i rischi di mercato). Ciò significa che, in questo caso, le perdite in casi estremi (evidenziate dalla parte destra della figura A.1) sono più probabili rispetto a quelle derivanti da una distribuzione statistica normale. Nel caso in esame, ad esempio, la perdita che si potrebbe subire con un intervallo di confidenza del 99%, cioè con una probabilità di verifica pari all'1% dei casi (cosiddetto 1° percentile), è compresa tra -9,45 e -23,91 euro²⁷:

Figura A.2
Calcolo del primo percentile della distribuzione delle perdite



Rating	Valore (in €)	Probabilità	Probabilità cumulate	Variatione di valore del prestito
AAA	109.35	0.02%	100.00%	1.82
AA	109.17	0.33%	99.98%	1.64
A	108.64	5.95%	99.65%	1.11
BBB	107.53	86.93%	93.70%	0.00
BB	102.01	5.30%	6.77%	-5.52
B	98.09	1.17%	1.47%	-9.45
CCC	83.63	0.12%	0.30%	-23.91
Default	51.13	0.18%	0.18%	-56.40

Nel caso di una distribuzione normale, invece, il 1° percentile (che è uguale al valore medio - 2,33 volte la deviazione standard della distribuzione), è pari a -6,97; questo

²⁷ Operando con solo sette classi di rating non è possibile pervenire ad una stima più precisa di questo valore.

valore è di gran lunga inferiore a quello relativo alla distribuzione "reale" del valore del nostro prestito²⁸.

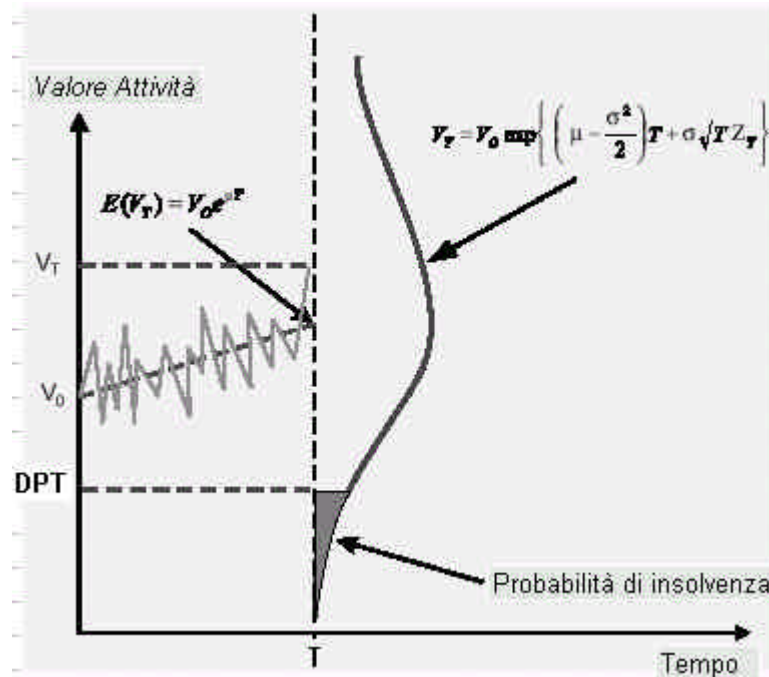
Pertanto, nel campo del rischio di credito, l'eventualità che si verifichino eventi "estremi", anche se con bassa probabilità deve essere attentamente valutata per evitare di mettere a rischio la solvibilità della banca.

Appendice B: il calcolo della probabilità di insolvenza *risk neutral* Q sulla base dei prezzi azionari: il metodo del *Default Point* di KMV

Secondo il modello Portfolio Manager™ di KMV, il valore delle attività di un'azienda segue il processo indicato nella figura B.1.

Figura B.1

Distribuzione del valore delle attività aziendali nel tempo



Fonte: Mark et al. (2000), pag. 74.

Secondo questo approccio, indicato per la prima volta da Merton (74), il valore delle attività aziendali si evolve secondo un moto geometrico Browniano, cioè:

$$V_T = V_0 \exp \left\{ \left(m - \frac{s^2}{2} \right) T + s \sqrt{T} Z_T \right\}$$

dove: Z_T = variabile casuale che si distribuisce normalmente, con media zero e varianza 1; m e s = rispettivamente, media e varianza del tasso di rendimento sulle attività aziendali.

Pertanto, V_T si distribuisce secondo una distribuzione lognormale, con valore atteso al tempo T pari a:

$$E(V_T) = V_0 \exp \{ m T \}$$

²⁸ Nel foglio di lavoro allegato a questo capitolo (Tabella 9), abbiamo riportato anche il calcolo del 1° percentile per una distribuzione normale.

Quando il valore delle attività al tempo T , V_T , risulta pari o inferiore a un determinato valore limite, definito *Default Point* (DPT)²⁹, l'azienda va incontro all'insolvenza. Quindi, la probabilità di insolvenza per l'azienda in questione, (*Expected Default Frequency* o *EDF*), sarà pari a:

$$EDF = \Pr[V_T \leq DPT_T]$$

A questo punto, per determinare la probabilità di Default "risk-neutral" al tempo T , occorrerà valutare l'evoluzione del valore delle attività aziendali e il suo valore soglia di default (cioè, il raggiungimento del punto di default), nell'ipotesi "risk-neutral" che le attività abbiano un tasso di rendimento pari al tasso privo di rischio (questo valore lo indicheremo con $V_T^{risk-free}$, ad indicare l'evoluzione del valore delle attività in base al tasso privo di rischio).

Pertanto, modificando opportunamente la formula precedente, otteniamo:

$$Q = \Pr[V_T^{risk-free} \leq DPT_T] = \Pr\left[\ln V_0 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z_T \leq \ln DPT_T\right]$$

$$= \Pr\left\{Z_T \leq -\frac{\ln\left[\frac{V_0}{DPT_T}\right] + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]T}{\sigma\sqrt{T}}\right\} = N(-d_2^{risk-free})$$

dove $N(\cdot)$ = distribuzione normale standard cumulata e

$$d_2^{risk-free} = \frac{\ln\left[\frac{V_0}{DPT_T}\right] + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Nel dischetto allegato a questo manuale abbiamo riportato un'applicazione del calcolo della probabilità di default "risk-neutral" Q a un anno (ossia, $T=1$), con riferimento ad un'ipotetica struttura finanziaria aziendale.

Appendice C: il calcolo del *Credit Spread* implicito nei prestiti a rischio di insolvenza nel modello Portfolio Manager[®]

Nel modello basato sulla teoria delle opzioni proposto dalla società KMV (descritto nel par. 1.6.3), è possibile determinare, sulla base della seguente equazione, in un contesto uniperiodale, il tasso di sconto r^i implicito del prestito (dove $r^i = r^F + \text{Credit Spread}$), che tiene conto del rischio di default. Si parte dalla seguente uguaglianza:

$$\frac{100(1 - LGD)}{1 + r^F} + \frac{100LGD(1 - Q)}{1 + r^F} = \frac{100}{1 + r^F + \text{Credit Spread}}$$



dove i due termini nel primo membro sono VA_1 (Valore attuale *default-free*) e VA_2 (Valore Attuale *rischioso*), mentre il secondo membro rappresenta il valore attuale del

²⁹ Gli autori di questo modello assumono che il DPT sia pari alla somma del debito a breve termine e la metà del debito a lungo termine.

valore nominale del prestito, scontato al tasso di sconto implicito r^i , che include il tasso di interesse "risk free" e la maggiorazione, detta *Spread*, dovuta al rischio di insolvenza del prestito.

Esplicitando il *Credit Spread* nell'equazione precedente, otteniamo:

$$\text{Credit Spread} = \frac{\text{LGD} * Q * (1 + r^f)}{1 - \text{LGD} * Q}$$

Dopo gli opportuni calcoli, con un tasso di interesse r^f "risk free" del 10% il *credit spread* ad un anno su questo prestito rischioso risulta pari a 4,6%; il tasso di sconto implicito R è pertanto pari al 14,6%³⁰.

³⁰ Anche in un contesto multiperiodale, il metodo di valutazione "risk neutral" ci fornisce delle indicazioni circa la redditività corretta per il rischio del prestito, e quindi sulla congruenza del *credit spread* applicato dalla banca (nell'esempio del paragrafo 3.3.3, *Credit spread* = 20% - 10% = 10%). Infatti, poiché il valore attuale di questo prestito del valore nominale di €100 è pari a €94,48, lo stesso *non* risulterebbe conveniente da un punto di vista finanziario. A questo punto, la banca può pertanto decidere di: a) aumentare le commissioni sull'erogazione del prestito, oppure b) aumentare il tasso di interesse r^i sul prestito, ampliando il relativo *credit spread*.

